Loi de Betz

C'est en 1919 que le physicien allemand Albert Betz (1885 - 1968) publia cette étude sur les éoliennes. Il s'agit de déterminer la puissance mécanique maximale que l'éolienne peut fournir pour entraîner un alternateur ou tout autre charge. Albert Betz a réussi à démontrer que cette puissance maximale ne dépend que de la masse volumique ρ de l'air, de la vitesse du vent V_1 devant l'éolienne et de l'aire S de la surface balayée par les pales. La forme des pales et leur nombre n'interviennent pas. Ce théorème s'applique aussi aux hydroliennes, ρ devenant la masse volumique de l'eau et V_1 la vitesse du courant marin par rapport à l'hydrolienne.

1 Rappel sur la notion de débit massique à travers une surface plane d'aire S.

On considère une surface plane caractérisée par son vecteur surface $\overrightarrow{S}$. On note $\overrightarrow{V}$ la vitesse du fluide **dans un repère liée à cette surface**. La démonstration est très proche de celle faite pour déterminer l'expression de l'intensité d'un courant à travers une surface. On choisit comme surface le disque de centre O, d'aire S, caractérisé par le vecteur normal $\overrightarrow{S}$.

Le fluide traversant le disque entre les instants de dates zéro et t est celui qui, à la date zéro, est contenu dans le cylindre dont la base est le disque étudié et la génératrice $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{V} \cdot t$; on note ρ la masse volumique du fluide ; Le volume du cylindre est : $h \cdot S = S \cdot V \cdot \cos(\theta) \cdot t = \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{V} \cdot t$; La masse de fluide traversant le disque par unité de temps, c'est à dire le débit massique de fluide à travers le disque est ainsi :

$$\boxed{D_m = \rho \cdot \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{V}} \quad (1)$$

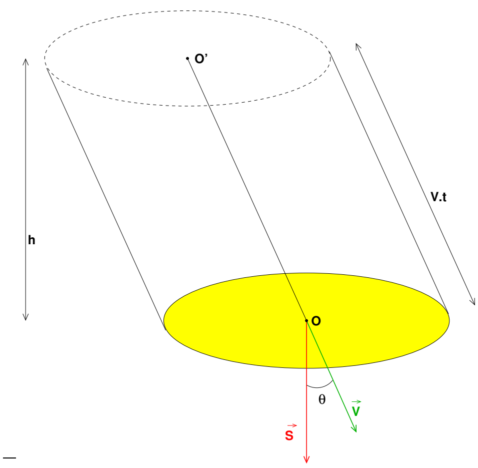

FIGURE 1 –

Il s'agit du flux à travers la surface du vecteur $\rho \cdot \overrightarrow{V}$... Par la suite, les vecteurs vitesse et surface vont être colinéaires ; cela va permettre de poser :

$$D_m = \rho \cdot S \cdot V \quad (2)$$

2 Généralités sur les régimes permanents.

On note V_1 la vitesse du vent, mesurée par rapport à la terre, avant son interaction avec l'éolienne. L'air qui interagit avec les pales cède à celles-ci une partie de son énergie cinétique et est ainsi ralentie ; sa vitesse après interaction est : $V_2 < V_1$. L'air qui interagit avec les pales est celui qui circule dans un tube imaginaire appelé « tube de courant » dont la section droite, au niveau de l'éolienne est un disque de centre A et d'aire S : l'aire de la surface balayée par les pales.

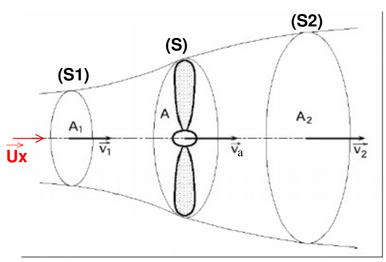

FIGURE 2 –

On suppose le régime de fonctionnement de l'éolienne permanent (on dit aussi : stationnaire). Cela signifie que les paramètres intensifs de ce problème : vitesse de l'air, vitesse de rotation des pales, puissance mécanique transmise par l'éolienne à l'alternateur, etc... sont indépendantes du temps.

Considérons maintenant deux sections droites quelconques du tube de courant. La masse volumique, la température et la pression restant fixes entre ces deux sections, la masse d'air qui entre par la première section en une seconde doit nécessairement être égale à la masse d'air qui sort par la seconde section par seconde. **Le débit massique est ainsi le même en toute section droite du tube de courant**. L'éolienne modifie la vitesse de l'air mais pas sa pression et sa température. On peut ainsi considérer que la masse volumique ρ de l'air reste fixe. La conservation du débit massique se traduit donc par la conservation du produit S.V :

$$S_1 \cdot V_1 = S \cdot V_a = S_2 \cdot V_2 \quad (3)$$

Puisque la vitesse de l'air diminue en traversant l'éolienne, l'aire S de la section droite du tube de courant augmente. V_a est la vitesse moyenne de l'air dans le plan de rotation des pales.

3 Expression de la puissance mécanique fournie par le vent.

Sans variation sensible de température et de pression à la traversée de l'éolienne, l'enthalpie massique et l'énergie interne massique du gaz restent fixe. Dans ces conditions, chaque kilogramme de gaz fournit à l'éolienne en la traversant une énergie égale à sa diminution d'énergie cinétique massique :

$$e_m = \frac{1}{2} \cdot \left(V_1^2 - V_2^2\right) \tag{4}$$

On obtient la puissance mécanique reçue par l'éolienne en multipliant la quantité précédente par la masse traversant l'éolienne en une seconde c'est à dire par le débit massique :

$$P_m = D_m \cdot e_m = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_1 \cdot V_1 \cdot \left(V_1^2 - V_2^2\right) \tag{5}$$

Reste à exprimer S_1 et V_2 en fonction de S et V_1...

4 Autre expression de la puissance mécanique fournie par le vent.

Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'air contenu à la date t dans le tube de courant entre les sections S_1 et S_2. Entre les instants de date t et (t+dt), entre à travers S_1la masse D_m.dt d'air à la vitesse V_1et sort à travers S_2 la masse D_m.dt d'air à la vitesse V_2. La variation de quantité de mouvement du système défini est ainsi :

$$d\overrightarrow{p} = D_m.dt.\left(V_2 - V_1\right).\overrightarrow{U_x} \tag{6}$$

où $\overrightarrow{U_x}$est un vecteur unitaire orienté suivant l'axe de l'éolienne dans le sens des vecteurs vitesse. La résultante des forces extérieures exercée sur ce système est :

$$\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = D_m.\left(V_2 - V_1\right).\overrightarrow{U_x} \tag{7}$$

Principe des actions réciproques (dit encore : principe de l'action et de la réaction) : si l'éolienne exerce sur l'air des actions de résultante $\overrightarrow{F_{ext}}$, le gaz exerce sur l'éolienne des actions de résultante opposée : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F_{ext}}$. Sachant que la puissance est le produit scalaire du vecteur force par le vecteur vitesse, la puissance mécanique fournie par l'air à l'éolienne peut donc s'exprimer aussi de la façon suivante :

$$P_m = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_a} = D_m \cdot V_a \cdot \left(V_1 - V_2\right) \tag{8}$$

Remarque pour les lecteurs férus de dynamique des fluides : la formule (8) pouvait s'obtenir en appliquant le théorème d'Euler au système défini en début de ce paragraphe.

En identifiant les deux expressions de P_m obtenues, on obtient :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S_1 \cdot V_1 \cdot \left(V_1^2 - V_2^2\right) = \rho \cdot S_1 \cdot V_1 \cdot V_a \cdot \left(V_1 - V_2\right) \tag{9}$$

Connaissant l'identité remarquable sur le différence de deux carrés, on obtient de façon immédiate, puisque $V_1 \neq V_2$:

$$V_a = \frac{1}{2}\left(V_1 + V_2\right) \tag{10}$$

En reportant dans l'expression de la puissance mécanique et en choisissant comme expression du débit massique : $D_m = \rho \cdot S \cdot V_a$, on obtient :

$$\boxed{P_m = \rho \cdot S \cdot V_a^2 \cdot \left(V_1 - V_2\right) = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot \left(V_1 + V_2\right)^2 \cdot \left(V_1 - V_2\right)} \tag{11}$$

5 Optimisation de la puissance mécanique fournie : limite de Betz.

La valeur de V_1 est imposée par la nature, puisqu'il s'agit de la vitesse du vent. En revanche, la forme et l'inclinaison des pales peuvent influencer la valeur de V_2 en ralentissant plus ou moins l'air ; d'où la question : **pour une valeur de V_1 imposée, quelle valeur de V_2 faut-il choisir pour obtenir un maximum de puissance mécanique ?**

Pour répondre, on pose : $V_2 = x \cdot V_1$ avec évidemment : $0 < x < 1$; il s'agit de déterminer la valeur de x qui optimise la puissance récupérée. L'expression de la puissance peut s'écrire :

$$P_m = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot V_1^3 \cdot (1 + x)^2 \cdot (1 - x) \tag{12}$$

Soit :

$$P_m = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot V_1^3 \cdot f(x) \text{ avec : } f(x) = (1+x)^2 \cdot (1-x) = 1 + x - x^2 - x^3 \tag{13}$$

La dérivée de f(x) vaut :

$$f'(x) = 1 - 2x - 3x^2 = (1+x) \cdot (1-3x) \tag{14}$$

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

On remarque que la puissance mécanique transmise est maximale lorsque la vitesse du vent, juste derrière l'éolienne n'est plus que le tiers de la vitesse devant l'éolienne. En reportant la valeur maximale de f'(x) dans l'expression de la puissance mécanique (13), on obtient la puissance mécanique maximale susceptible d'être transmise par le vent à l'éolienne :

$$\boxed{P_{max} = \frac{8}{27} \cdot \rho \cdot S \cdot {V_1}^3}$$

retour à la page principale