RÉSOLUTION DES QUELQUES PROBLÈMES DE POURSUITE

Résumé

Il s'agit de problèmes assez classiques de cinétique. Je commence par traiter le plus classique d'entre eux, connu sous le nom de « problème » du chien d'Euler. Je traite ensuite deux variantes moins connues de ce problème puis le problème de poursuite de trois chats puis de quatre chats. On trouve déjà sur le net diverses versions de ces problèmes mais en général, les calculs n'y sont pas menés de façon complète et détaillée.

Le problème des chats est sans doute celui qui demande le moins de connaissances mathématiques sur le calcul intégral. En fonction de son agilité (ou pas) en mathématiques, le lecteur pourra respecter l'ordre du texte ou commencer par la partie IV !

Première partie

Problème du chien d'Euler.

Il s'agit du plus classique des problèmes de poursuite. Un homme, matérialisé ici par un point H, se déplace rectilignement à la vitesse v_o constante parallèlement à un axe (Co,y). A l'instant de date t=0, l'homme occupe la position Ho, le chien est en Co,origine du repère, à la distance L de Ho. Le chien se déplace alors dans le même plan horizontal que H, à la vitesse $v=k.v_o$ constante tout en modifiant la direction de ce vecteur de sorte qu'il soit en permanence orienté vers H. Bien sûr, il faut supposer $k > 1$ pour que le chien puisse rattraper son maître. Il s'agit de déterminer la date de rencontre et l'équation de la trajectoire de C.

Remarque : on peut imaginer plusieurs variantes de cet énoncé : l'homme peut être remplacé par un lapin ; on peut aussi imaginer un missile poursuivant un avion, un lion poursuivant une gazelle ...

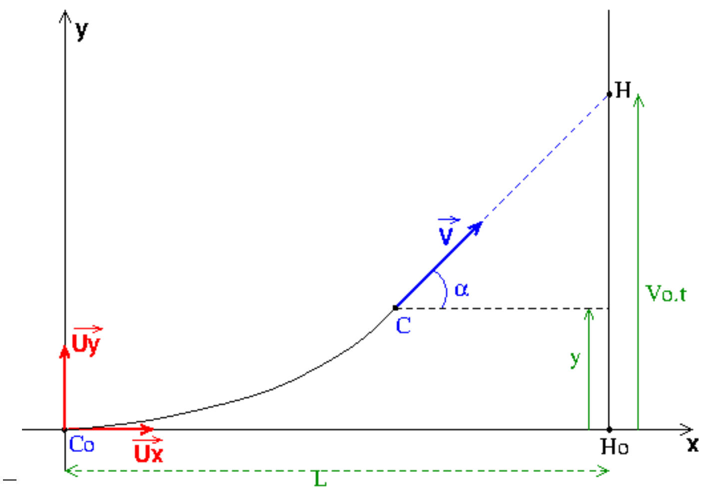


FIGURE 1 –

I.1 : Étude dans le référentiel terrestre.

Le plus simple (le moins compliqué plutôt !) consiste à raisonner en coordonnées cartésiennes, dans le repère terrestre R : (C_o,x,y). Nous mettons en équations les hypothèses du problème :

Première hypothèse : le vecteur vitesse du chien est constamment orienté en direction du point H :

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = \frac{v_0 \cdot t - y}{L - x} \tag{1}$$

soit :

$$v_0 \cdot t = y + (L - x)\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Deuxième hypothèse : la norme de la vitesse du chien est k fois celle de l'homme :

$$k \cdot v_0 = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{3}$$

On dérive par rapport au temps la relation (2) et on multiplie par k :

$$k \cdot v_0 = k \cdot \frac{d\left[y + (L-x)\frac{dy}{dx}\right]}{dt} = k \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\left[y + (L-x)\frac{dy}{dx}\right]}{dx} \tag{4}$$

Par identification entre (3) et (4) dans la mesure où $\frac{dx}{dt} \neq 0$ au cours du mouvement :

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k \cdot \frac{d\left[y+(L-x)\frac{dy}{dx}\right]}{dx} = k \cdot \left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + (L-x)\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Soit, en posant : $u = \frac{dy}{dx}$:

$$\sqrt{1+u^2} = k \cdot (L-x)\frac{du}{dx} \tag{5}$$

En séparant les variables :

$$\frac{dx}{L-x} = k \cdot \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \tag{6}$$

On peut alors écrire l'égalité, à une constante près, des deux primitives. Celle de gauche est triviale. Celle de droite est un classique des cours de mathématique. On peut trouver une démonstration ici :

`https://math.stackexchange.com/questions/179129/how-to-integrate-frac1-sqrt1x2-using-substitution`

$$-\ln(L-x) = k \cdot \ln\left[u+\sqrt{1+u^2}\right] + C \tag{7}$$

On obtient la constante d'intégration C en considérant l'instant initial : le chien est alors en x=0 avec une vitesse colinéaire à $\overrightarrow{u_x}$, ce qui correspond à u=0. On obtient ainsi : $C = -\ln(L)$; ce qui conduit à :

$$\frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{L}{L-x}\right) = \ln\left[u+\sqrt{1+u^2}\right] \tag{8}$$

Soit :

$$\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\frac{1}{k}} = u+\sqrt{1+u^2} \quad ou \quad \sqrt{1+u^2} = \left(\frac{L}{L-x}\right)^{\frac{1}{k}} - u \tag{9}$$

On élève au carré :

$$1+u^2 = \left(\frac{L}{L-x}\right)^{\frac{2}{k}} + u^2 - 2u \cdot \left(\frac{L}{L-x}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Après simplification :

$$u = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\frac{1}{k}} - \left(\frac{L}{L-x}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{L-x}{L}\right)^{-\frac{1}{k}} - \left(\frac{L-x}{L}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \tag{10}$$

Reste à intégrer par rapport à x pour avoir l'équation cartésienne de la trajectoire du chien puisque : $u = \frac{dy}{dx}$:
Rappelons que par hypothèse : k > 1. En posant : $z = \frac{L-x}{L}$: $dz = -\frac{dx}{L}$; ainsi :

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{L-x}{L}\right)^{-\frac{1}{k}} - \left(\frac{L-x}{L}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \cdot dx = \frac{L}{2} \cdot \left(z^{\frac{1}{k}} - z^{-\frac{1}{k}}\right) \cdot dz$$

$$y = \frac{L}{2}\left(\frac{z^{\left(1+\frac{1}{k}\right)}}{1+\frac{1}{k}} - \frac{z^{\left(1-\frac{1}{k}\right)}}{1-\frac{1}{k}}\right) + D = \frac{L \cdot k}{2} \cdot z \cdot \left(\frac{z^{\frac{1}{k}}}{k+1} - \frac{z^{-\frac{1}{k}}}{k-1}\right) + D$$

avec D : constante d'intégration.

$$y = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (L-x) \cdot \left(\frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^{-\frac{1}{k}}\right) + D \tag{11}$$

À l'instant initial : x=0 et y=0 ; cela conduit à :

$$0 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot L \cdot \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) + D = -\frac{k \cdot L}{k^2-1} + D$$

Au final, l'équation cartésienne de la trajectoire du chien peut s'écrire :

$$\boxed{y = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (L-x) \cdot \left(\frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{L-x}{L} \right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{L-x}{L} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + \frac{k \cdot L}{k^2-1}} \tag{12}$$

Le chien rejoint l'homme au point Hr, tel que x=L. L'ordonnée du point de rencontre est donc :

$$\boxed{y_R = \frac{k \cdot L}{k^2-1}} \tag{13}$$

$y_R$est nécessairement strictement positif. On retrouve un résultat intuitivement évident : la rencontre n'est possible que pour $k > 1$. Cette condition est évidemment nécessaire. Nous venons de montrer qu'elle est suffisante. L'homme se déplaçant à la vitesse constante v_o, la durée de la poursuite est tout simplement :

$$t_R = \frac{y_R}{v_0} = \frac{k \cdot L}{(k^2-1) \cdot v_0} \tag{14}$$

La distance parcourue par le chien jusqu'à la position de rencontre est :

$$d_C = k \cdot v_0 \cdot t_R = \frac{k^2 \cdot L}{k^2-1} \tag{15}$$

Voici ci-dessus un exemple de trajectoire correspondant au cas : L=100m ; v_0=3m/s ; k=3.

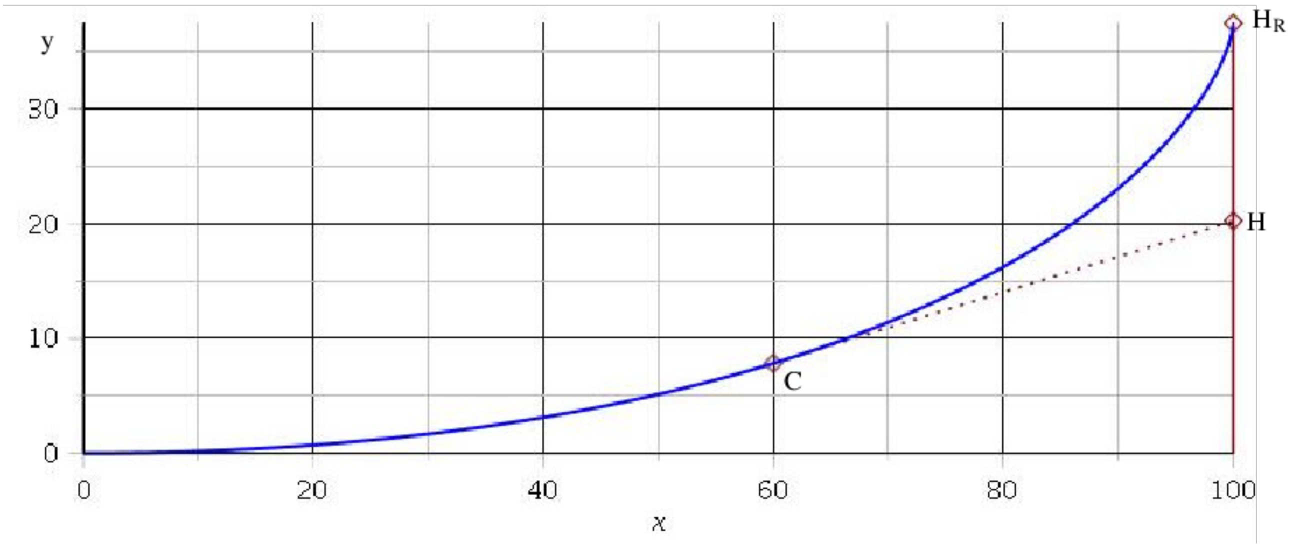


FIGURE 2 –

Pour illustrer cette poursuite, voici une animation disponible, soit au format mp4, soit au format avi. On y visualise les positions successives, à intervalles de temps constants, de l'homme (point bleu) et du chien (point rouge). Une ligne pointillée noire visualise à chaque instant la direction du vecteur vitesse du chien.

animation au format .avi␣ animation au format .mp4

I.2 : étude du mouvement relatif du chien par rapport à l'homme.

Nous raisonnons maintenant dans le repère relatif R' en translation par rapport à R d'origine H : le repère (H,x,y). Il est en translation par rapport à R. Nous repérons la position de C dans ce repère par ses coordonnées polaires (r , ϑ) conformément à la figure 3. Dans la base mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$les vecteurs vitesses, mesurés par rapport à R, ont pour expressions :

$$\overrightarrow{v_o} = -v_o.\cos(\theta).\overrightarrow{u_r} + v_o.\sin(\theta).\overrightarrow{u_\theta} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = -v.\overrightarrow{u_r} \tag{16}$$

La vitesse relative de C par rapport à H, c'est à dire la vitesse de C dans R' vaut, selon la relation de composition des vitesses, dans le cas de deux repères en translation :

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_o} = [v_o.\cos(\theta) - v].\overrightarrow{u_r} + v_o.\sin(\theta).\overrightarrow{u_\theta} \tag{17}$$

Or, l'expression générale de la vitesse dans R' dans la base polaire est :

$$\overrightarrow{v_r} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} \tag{18}$$

Par identification des deux expressions de cette vitesse relative, on obtient les deux équations différentielles couplées décrivant le mouvement relatif :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_o.\cos(\theta) - v \\ r \cdot \frac{d\theta}{dt} = -v_o.\sin(\theta) \end{cases} \tag{19}$$

Par « division membre à membre », on obtient :

$$\frac{\frac{dr}{dt}}{r \cdot \frac{d\theta}{dt}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{-1}{\tan(\theta)} + \frac{v}{v_o.\sin(\theta)} \tag{20}$$

Soit, en séparant les variables :

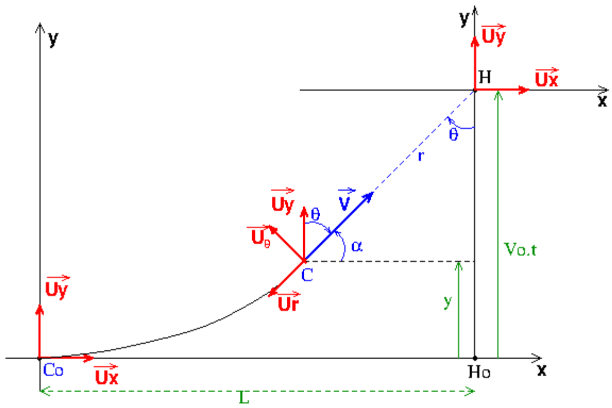


FIGURE 3 –

$$\frac{dr}{r} = -\frac{d\theta}{\tan(\theta)} + \frac{k.d\theta}{\sin(\theta)} \tag{21}$$

Les primitives des deux termes de droite ne sont pas « évidentes ». On trouvera les démonstrations ici :

Primitive 1/tan(x)

Primitive 1/sin(x)

Cela donne :

$$\int \frac{d\theta}{\tan(\theta)} = \ln[\sin(\theta)] + constante \quad ; \quad \int \frac{d\theta}{\sin(\theta)} = \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + constante$$

En prenant les primitives des termes de (20) et en écrivant la constante l'intégration sous la forme ln(K) avec K>0 :

$$\ln(r) = -\ln[\sin(\theta)] + k.\ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + \ln(K) \tag{22}$$

$$\ln(r) = \ln\left[\frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^k}{\sin(\theta)}\right] + \ln(K)$$

Cas particulier de l'instant initial : C est en C_o, H en H_o, donc : r=L si $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\ln[L] = \ln\left[\frac{\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^k}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right] + \ln(K) \quad donc \quad K = L$$

Finalement, l'équation polaire de la trajectoire de C dans R' est :

$$\boxed{r = L \cdot \frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^k}{\sin(\theta)}} \tag{23}$$

C rejoint H si r=0 pour $\theta = 0$ puisque H appartient à l'axe (H_o,y) On peut effectuer un développement de la tangente et du sinus, limité au premier ordre, pour étudier le comportement de r au voisinage de $\theta = 0$. Cela conduit à :

$$\lim_{\theta \to 0} r = 0 \quad si \quad k > 1 \qquad ; \qquad \lim_{\theta \to 0} r = \frac{1}{2} \quad si \quad k = 1 \qquad ; \qquad \lim_{\theta \to 0} r = +\infty \quad si \quad k < 1$$

Le chien ne peut rattraper l'homme que s'il se déplace plus vite que lui , c'est à dire pour k>1 ! Cela a déjà été montré par la première méthode.

On peut cependant en dire un peu plus pour les situations telles que $k \leq 1$ en traçant les trajectoires de C dans le repère mobile (H,x,y) pour différentes valeurs de k. Les cooordonnées relatives du chien par rapport à l'homme, c'est à dire les coordonnées de C dans le repère mobile (H,x,y) se déduisent de l'équation polaire (23) :

$$x_r = -r.\sin(\theta) \quad ; \quad y_r = -r.\cos(\theta) \tag{24}$$

Dans tous les cas, r commence par diminuer quand C se rapproche de l'axe (H_o,y), lorsque ϑ diminue à partir de la valeur $\frac{\pi}{2}$. Ensuite, la situation dépend de la valeur de k :

Premier cas : k > 1 : (courbe rouge) r devient nul en $\theta = 0$. Le chien rattrape l'homme. Situation déjà étudiée.

Deuxième cas : k=1 : (courbe bleue) Lorsque C atteint l'axe (H_o,y), il est encore à la distance L/2 de H : il n'a fait que la moitié de son retard. C court alors derrière H le long de l'axe (H_o,y) mais, comme les deux vitesses sont égale, C reste toujours à la distance constante L/2 de H, C ne rattrape jamais H.

Troisième cas : k < 1 : (courbe verte) Lorsque C se rapproche asymptotiquement de l'axe (H_o,y), la distance r augmente. Résultat logique : C court derrière H avec une vitesse plus faible que celle de H ; il est logique qu'il « perde du terrain » sur H et ne le rattrapera pas !

Pour mieux illustrer le facteur temps, voici une animation disponible, soit au format mp4, soit au format avi. On y visualise les positions successives relative, à intervalles de temps constants, identiques dans les trois cas, du chien par rapport à l'homme.

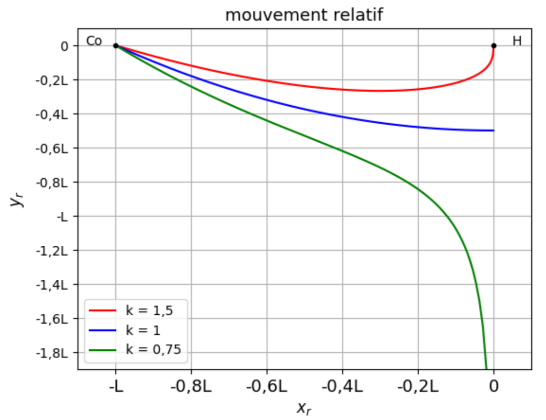


FIGURE 4 –

animation au format .avi␣ animation au format .mp4

Si k > 1, on peut retrouver la durée du mouvement en tenant compte des relations (19) et (23) :

$$r \cdot \frac{d\theta}{dt} = -v_o . \sin(\theta) \quad ; \quad dt = -\frac{r.d\theta}{v_o . \sin(\theta)} = -\frac{L}{v_o} \cdot \frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^k}{\sin^2(\theta)} \cdot d\theta \tag{25}$$

La durée t_R entre le départ et la rencontre de C et H est la durée nécessaire pour que l'angle ϑ passe de $\frac{\pi}{2}$ à zéro :

$$t_R = -\frac{L}{v_o} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^k}{\sin^2(\theta)} \cdot d\theta = \frac{L}{v_o} \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^k}{\sin^2(\theta)} \cdot d\theta \tag{26}$$

Je donne les grandes lignes du calcul intégral. Au lecteur de vérifier pas à pas. On effectue un changement de variable en posant : $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$; ainsi :

$$\sin(\theta) = \frac{2u}{1+u^2} \quad ; \quad du = \frac{d\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{d\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta \quad ; \quad d\theta = 2\frac{du}{1+u^2} \tag{27}$$

$$t_R = \frac{L}{2v_o} \int_0^1 \left(u^{k-2} + u^k\right) .du = \frac{L}{2v_o} \cdot \left[\frac{u^{k-1}}{k-1} + \frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{L}{2v_o} \cdot \left[\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right] \tag{28}$$

$$\boxed{t_R = \frac{k \cdot L}{(k^2-1) \cdot v_0}} \tag{29}$$

On retrouve (heureusement !) le résultat (14) obtenu par la première méthode.

Deuxième partie

Variante du problème du chien d'Euler : le chien nageur.

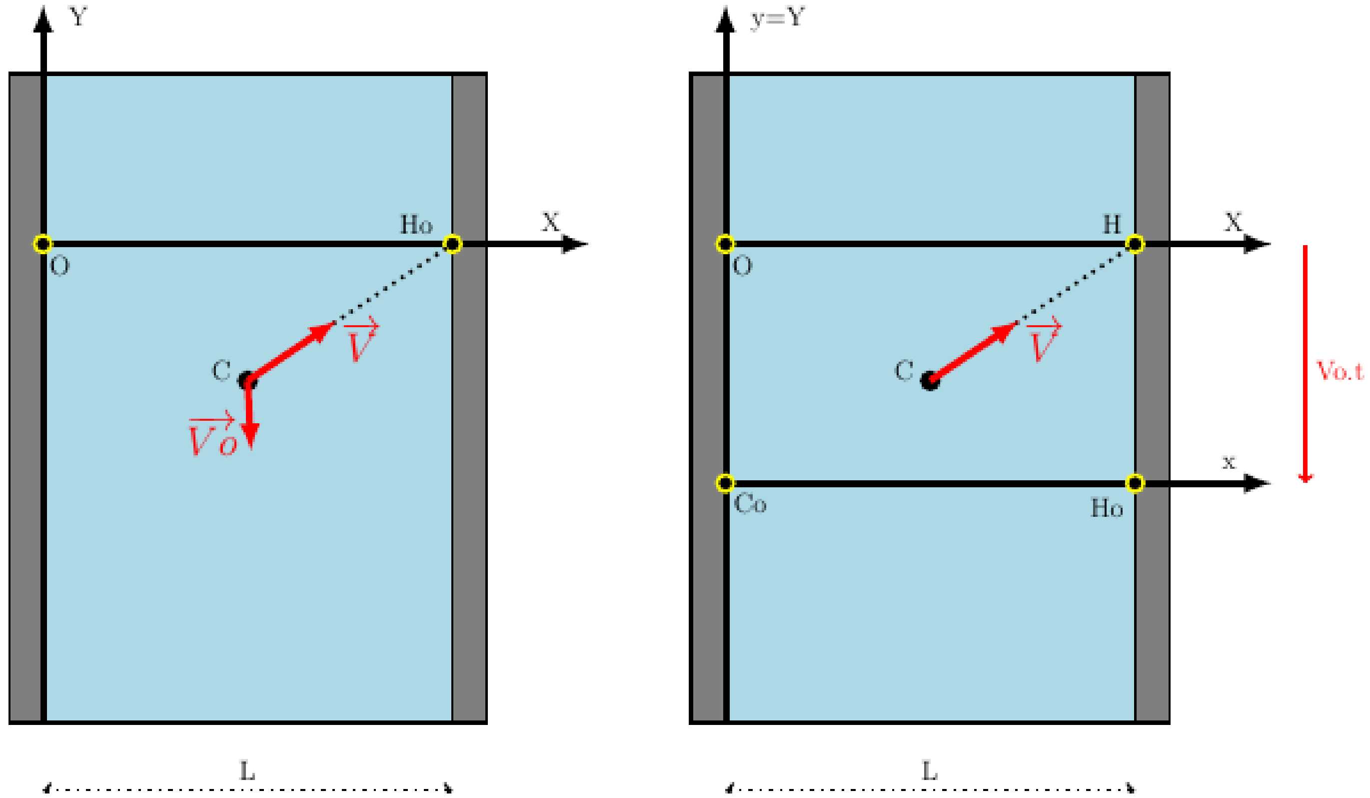
Le chien est initialement sur la berge d'une rivière de largeur L et son maître reste immobile sur la berge opposée en Ho. Un courant entraîne l'eau dans le sens des Y négatifs à la vitesse Vo. Le chien, assimilé au point C, entraîné par le courant, nage à la vitesse constante V=k.Vo par rapport à l'eau,en maintenant constamment cette vitesse $\overrightarrow{V}$ orienté vers Ho. (voir figure ci-dessous, schéma de gauche)

1 Étude du mouvement du chien dans le repère relatif lié à l'eau.

L'étude directe du mouvement de C dans le repère (O,X,Y) lié à la terre est possible en considérant que dans ce repère, la vitesse du chien est :

$$\vec{V_c} = V \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|} - V_o.\overrightarrow{u_Y} = V_o \cdot \left(k \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|} - \overrightarrow{u_Y} \right) \tag{30}$$

Cette étude est assez délicate. Il est préférable, afin d'exploiter les résultats précédents, d'étudier d'abord le mouvement du chien dans le repère (Co,x,y) lié à l'eau. (Voir figure ci-dessous, schéma de droite).



Dans ce repère relatif, la vitesse du chien est seulement sa vitesse $\vec{V}$ constamment orienté vers son maître mais celui-ci, dans ce repère relatif, n'est plus fixe mais en mouvement dans le sens des y positifs à la vitesse Vo. Nous sommes donc ramenés à l'étude précédente du chien d'Euler. Une fois cette étude terminée, il sera facile d'obtenir l'équation de la trajectoire dans le repère terrestre car les deux repères sont simplement en mouvements de translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. L'étude est celle de la partie I et j'ai pris soin d'utiliser les même notations. L'équation de la trajectoire dans le repère (Co,x,y) est fournie en (12) :

$$y = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (L - x) \cdot \left(\frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{L-x}{L} \right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k-1} \cdot \left(\frac{L-x}{L} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + \frac{k \cdot L}{k^2 - 1} \tag{31}$$

La durée de la traversée, est indépendante du repère d'étude ; elle est donnée par la relation (14) :

$$\boxed{t_R = \frac{k \cdot L}{(k^2 - 1) \cdot v_0}} \tag{32}$$

On peut remarquer que le chien ne peut rejoindre son maître que pour k>1.

2 Étude du mouvement du chien dans le repère terrestre.

Les deux repère sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Si (x,y) sont les coordonnées de C à la date t dans le repère (Co,x,y), ses coordonnées (X,Y) dans le repère terrestre (O,X,Y) sont :

$$X = x \quad ; \quad Y = y - V_o.t \tag{33}$$

La relation (2) a conduit à :

$$v_0 \cdot t = y + (L - x) \frac{dy}{dx}$$

Selon (19) :

$$Y = y - y - (L - x) \frac{dy}{dx} = -(L - x) \frac{dy}{dx} \tag{34}$$

Il faut donc calculer la dérivée par rapport à x de l'expression de y rappelée en (17). Le calcul est un peu long mais ne présente aucune difficulté :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L-x}{L}\right)^{\frac{1}{k}} - \left(\frac{L}{L-x}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \tag{35}$$

D'où l'équation de la trajectoire dans le repère terrestre (O,X,Y) :

$$\boxed{Y = \frac{1}{2}(L-X)\cdot\left[\left(\frac{L-X}{L}\right)^{\frac{1}{k}} - \left(\frac{L}{L-X}\right)^{\frac{1}{k}}\right]} \tag{36}$$

Cas particulier k=1 : le chien et le courant ont même vitesse :

L'équation de la trajectoire se simplifie :

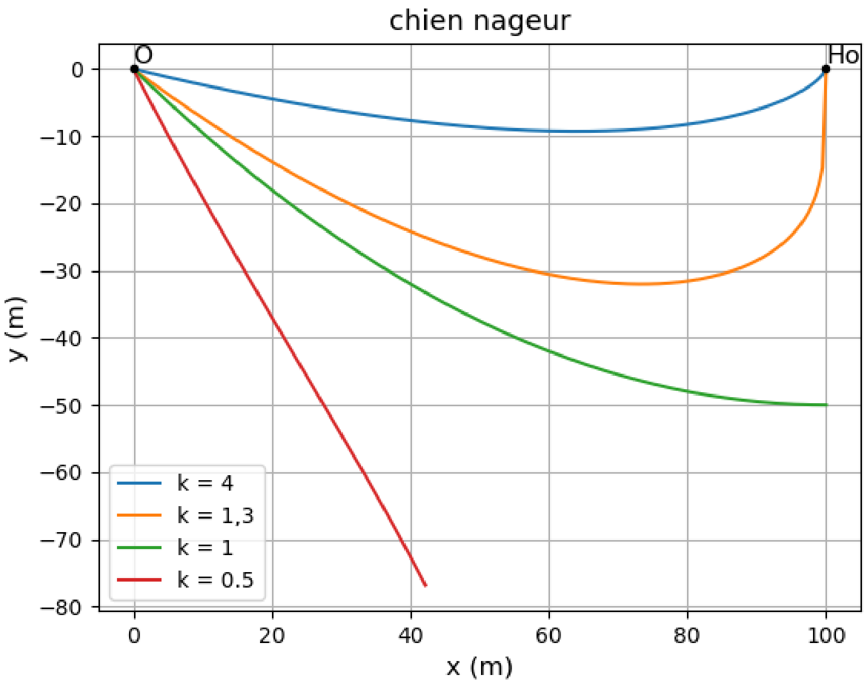
$$Y = \frac{1}{2}\left[\frac{(L-X)^2}{L} - L\right] = \frac{X.(X-2L)}{2L} \tag{37}$$

Nous avons montré précédemment que, pour k=1, le chien ne peut rejoindre son maître. Il peut sependant atteindre la berge opposée mais « plus bas » dans la rivière, en $Y = -\frac{L}{2}$.

Situations telle que k<1 :

La situation X=L n'admet aucune valeur possible de Y : le chien ne peut atteindre la berge : le courant est trop rapide.

La simulation ci-dessous récapitule les différentes situations, étudiées dans le repère terrestre :



k=4 : la vitesse du chien est 4 fois plus importante que celle du courant. Le chien est relativement peu dévié par rapport à la trajectoire rectiligne recherchée.

k=1,3 : la vitesse du chien n'est que de peu supérieure à celle du courant. Il est fortement dévié mais, arrivé près de la berge opposé, il peut nager à contre courant pour rejoindre son maître.

k=1 : le chien est fortement dévié de sa trajectoire et, rendu près de la berge opposée, il n'a plus la possibilité de revenir à contre courant vers son maître puisque les deux vitesses se compensent. Il accoste à une distance de son maître égale à la moitié de la largeur de la rivière.

k=0,5 : le chien n'a pas assez de vitesse pour lutter contre le courant, il est emporté par la rivière et mourra noyé s'il s'obstine à nager vers son maître. En pratique, dans de telles conditions, les chiens ne cherchent pas à nager à contre courant ; ils se laissent porter par le courant en nageant vers la berge qu'ils atteignent en des points assez éloignés de Ho.

Pour intégrer le facteur temps dans cette étude, voici une animation au format avi ou mp4, représentant les positions successives à intervalle de temps constant, de quatre chiens, partant tous les quatre à la date t=0 du point O. Le plus rapide (k=3), peu gêné par le courant, rejoint rapidement son maître. Celui correspondant à k=1,3 est rapidement entraîné par le courant puis met beaucoup de temps à remonter à contre courant le long de la berge car la différence entre sa vitesse par rapport à l'eau et la vitesse du courant est faible. La situation k=1 interdit la remontée à contre courant ;

plus le chien se rapproche de la berge, plus la somme vectorielle des deux vitesses se rapproche du vecteur nul. La vitesse du chien par rapport à la terre devient de plus en plus faible ; le chien atteint la berge en une durée théoriquement infinie. Pour k=0,5, le chien est rapidement entraîné par le courant. Pour ne pas être contraint de trop dilater l'échelle des ordonnées, j'ai arbitrairement figé la position de ce chien dès qu'il a atteint l'abscisse X=L/2.

animation au format .avi␣ animation au format .mp4

Troisième partie

Autre variante du problème du chien d'Euler : le chien récalcitrant.

L'homme, matérialisé toujours par le point H, se déplace rectilignement à la vitesse v_o le long de l'axe (Ho,y), $H_o$étant la position initiale de H, confondue avec l'origine du repère. Le chien est relié à l'homme par une laisse inextensible de longueur L constante. A l'instant initial, le chien occupe la position Co de coordonnées (L,0) conformément à la figure. Le chien, réticent à la promenade, marche en laissant constamment la laisse tendue mais en orientant constamment sa vitesse dans la direction indiquée par la laisse. Il s'agit donc d'étudier le mouvement d'un point C dans le plan horizontal tel que la distance HC reste fixe et égale à L, le vecteur vitesse de C ayant constamment la direction de la droite (CH).

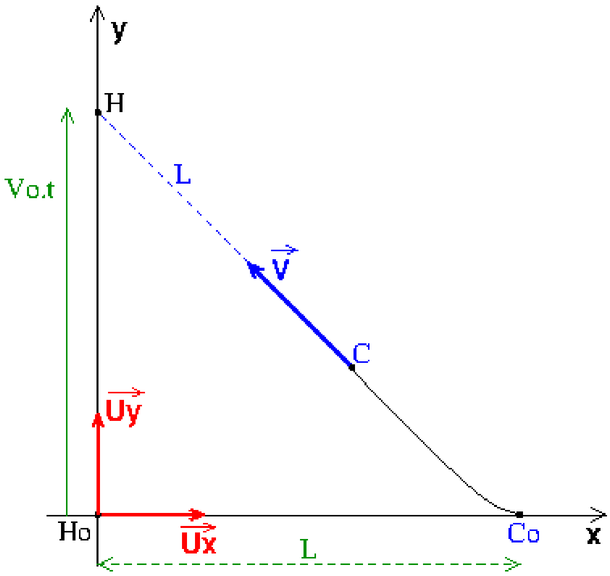


FIGURE 5 –

3 Équation de la trajectoire du chien.

Comme dans le problème précédent, il faut mettre en équation les deux hypothèses :

Première hypothèse : la distance CH reste égale à L. Il suffit d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{CH}$ et de considérer sa norme comme une constante égale à L :

$$\overrightarrow{CH} = -x \cdot \overrightarrow{u_x} + (v_0 \cdot t - y) \cdot \overrightarrow{u_y} \quad ; \quad L^2 = x^2 + (v_0 \cdot t - y)^2 \tag{38}$$

Puisque à chaque instant : $L \geq x$ et $v_0 \cdot t \geq y$:

$$v_0 \cdot t - y = \sqrt{L^2 - x^2} \tag{39}$$

Deuxième hypothèse : Le vecteur vitesse et le vecteur $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires ; le vecteur déplacement élémentaire de C, noté $\overrightarrow{dC}$ et le vecteur $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{CH} = -x \cdot \overrightarrow{u_x} + (v_0 \cdot t - y) \cdot \overrightarrow{u_y} \quad ; \quad \overrightarrow{dC} = dx \cdot \overrightarrow{u_x} + dy \cdot \overrightarrow{u_y} \tag{40}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{v_0 \cdot t - y} \tag{41}$$

En tenant compte de (17), on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} \tag{42}$$

Il suffit donc d'intégrer par rapport à x pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire de C.

On peut effectuer un changement de variable :

$$u = \sqrt{L^2 - x^2} \quad ; \quad du = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x \cdot dx}{\sqrt{L^2 - x^2}} \quad ; \quad dx = -\frac{u}{x} \cdot du \tag{43}$$

$$\frac{\sqrt{L^2-x^2}}{x}\cdot dx=-\frac{u^2}{x^2}.du=-\frac{u^2}{L^2-u^2}.du=\frac{L^2-u^2-L^2}{L^2-u^2}.du=du-\frac{L^2}{L^2-u^2}.du \tag{44}$$

$$y=-u+\int\frac{L^2}{L^2-u^2}\cdot du+K \quad \text{(K : constante d'intégration)} \tag{45}$$

Je calcule séparément :

$$F=\int\frac{L^2}{L^2-u^2}\cdot du=\frac{L}{2}\cdot\left[\int\frac{du}{L+u}+\int\frac{du}{L-u}\right]=\frac{L}{2}\cdot\ln\left(\frac{L+u}{L-u}\right) \tag{46}$$

$$y=-u+\frac{L}{2}\cdot\ln\left(\frac{L+u}{L-u}\right)+K$$

À l'instant initial : L=x donc u = 0 ; cela conduit à K=0. D'où l'équation de la trajectoire du chien :

$$\boxed{y=\frac{L}{2}\cdot\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-x^2}}{L-\sqrt{L^2-x^2}}\right)-\sqrt{L^2-x^2}} \tag{47}$$

Remarque : on peut obtenir d'autres expressions équivalentes de cette équation de trajectoire.
1° : On démontre en cours de math la relation entre le logarithme népérien et l'argument de la tangente hyperbolique :

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{L+u}{L-u}\right)=argth\left(\frac{u}{L}\right) \tag{48}$$

Cela conduit à une expression plus « condensée » de l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y=L\cdot argth\left(\frac{\sqrt{L^2-x^2}}{L}\right)-\sqrt{L^2-x^2}} \tag{49}$$

2° : on peut aussi simplifier le logarithme de (25) :

$$\frac{L}{2}\cdot\ln\left(\frac{L+u}{L-u}\right)=L\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{L+u}}{\sqrt{L-u}}\right)=L\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{L+u}}{\sqrt{L-u}}\cdot\frac{\sqrt{L+u}}{\sqrt{L+u}}\right)=L\cdot\ln\left(\frac{L+u}{\sqrt{L^2-u^2}}\right)=L\cdot\ln\left(\frac{L+u}{x}\right)$$

D'où une nouvelle expression de l'équation de la trajectoire un peu plus simple que (25) :

$$\boxed{y=L\cdot\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{L^2-x^2}} \tag{50}$$

4 Équations horaires du mouvement du chien

Les équations (16) et (27) permettent assez facilement d'obtenir la première :

$$v_0\cdot t=y+\sqrt{L^2-x^2}=L\cdot\text{argth}\left(\frac{\sqrt{L^2-x^2}}{L}\right) \tag{51}$$

$$\frac{\sqrt{L^2-x^2}}{L}=\tanh\left(\frac{v_0\cdot t}{L}\right) \tag{52}$$

En élevant au carré on obtient :

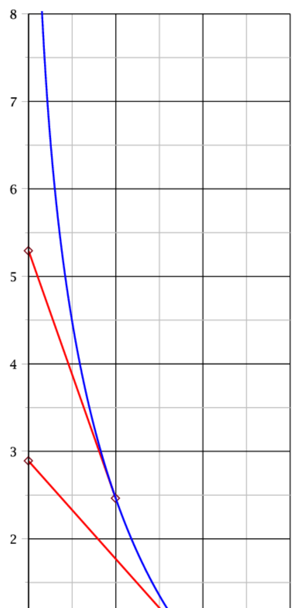
$$x^2=L^2\cdot\left[1-\tanh^2\left(\frac{v_0\cdot t}{L}\right)\right]$$

Soit :animation au format .mp4

$$\boxed{x=\frac{L}{\cosh\left(\frac{v_0\cdot t}{L}\right)}=\frac{2L}{\exp\left(\frac{v_0\cdot t}{L}\right)+\exp\left(-\frac{v_0\cdot t}{L}\right)}} \tag{53}$$

Les relations (29) et (30) donnent directement :

FIGURE 6 –



animation au format .avi

$$\boxed{y = v_0 \cdot t - L \cdot \tanh\left(\frac{v_0 \cdot t}{L}\right) = v_0 \cdot t - L \cdot \frac{\exp\left(\frac{2v_0 \cdot t}{L}\right) - 1}{\exp\left(\frac{2v_0 \cdot t}{L}\right) + 1}} \tag{54}$$

Ci-contre, j'ai représenté en bleu la trajectoire du chien pour L=3m et v_o=3m/s. En rouge : les positions de la laisse, du chien et de l'homme pour x= 2m puis pour x=1m. On voit bien que, au bout d'un temps long, le chien finit par marcher derrière son maître le long de l'axe (Ho,y).

Pour illustrer ces mouvements, voici une animation disponible, soit au format mp4, soit au format avi. On y visualise les positions successives, à intervalles de temps constants, de l'homme (point bleu) et du chien (point rouge). Une ligne noire visualise à chaque instant la position de la laisse tendue.

animation au format .avi ␣␣animation au format .mp4

Quatrième partie

Problème des trois ou quatre chats

animation au format .avi

animation au format .mp4

On imagine trois chats initialement placés aux trois sommets A, B et C d'un triangle équilatéral de centre de gravité G. Le chat A poursuit le chat B qui poursuit le chat C qui poursuit le chat A de la manière suivante :

- les trois chats ont la même vitesse v de déplacement ;

- le vecteur vitesse de chaque chat est à chaque instant orienté vers le chat qu'il poursuit.

Remarque : certains auteurs remplacent les chats par des souris, d'autres par des mouches ... En cliquant sur un des deux liens ci-dessus, on obtient une animation montrant les positions successives à intervalles de temps égaux, des trois chats. On remarque qu'à chaque instant, chaque animal occupe le sommet d'un triangle équilatéral de centre de gravité G fixe . Le triangle tourne autour de G , la longueur de chaque côté diminuant au cours du temps jusqu'à tendre vers zéro.

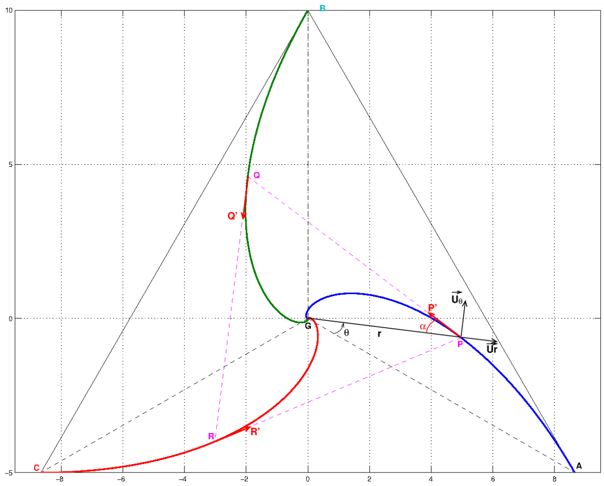


FIGURE 7 –

Positions relatives des trois chats à une date quelconque.

Il s'agit de démontrer qu'a chaque instant, les trois chats occupent les trois sommets d'un triangle équilatéral de centre de gravité G. Sachant que cela est vérifié à la date t = 0, il suffit de démontrer que, si cela est vérifié à une date t quelconque (positions P, Q, R des chats), cela est nécessairement vérifié à la date (t+Δt), avec Δt très petit (positions P', Q', R' des chats).

Entre les instants de dates t et (t+Δt), chaque chat parcourt la même distance :

$$PP' = QQ' = RR' = v.\Delta t \tag{55}$$

avec :

$$\overrightarrow{PP'} // \overrightarrow{PQ} \quad ; \quad \overrightarrow{QQ'} // \overrightarrow{QR} \quad ; \quad \overrightarrow{RR'} // \overrightarrow{RP}$$

Remarque : les trois distances PP', QQ' et RR' sont fortement exagérées sur la figure 5 par soucis de clarté.

Les triangles (GPP'), (GQQ') et (GRR') sont égaux (superposables). Cela impose :

$$GP' = GQ' = GR' \tag{56}$$

Ainsi que :

$$\widehat{P'GQ'} = \widehat{Q'GR'} = \widehat{R'GP'} = 120° \tag{57}$$

Les égalités (34) et (35) permettent d'affirmer que **le triangle (P'Q'R') est équilatéral de centre de gravité G**.

Équation de la trajectoire d'un chat.

La position P à la date t du chat parti de A est repéré par ses coordonnées polaires conformément à la figure n° 5. Le vecteur vitesse en P est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{PP'}$, l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur $\overrightarrow{PG}$ garde une valeur fixe égale au demi-angle au sommet du triangle équilatéral :

$$\alpha = \frac{\pi}{6}\ rad \tag{58}$$

Le vecteur vitesse a ainsi pour expression dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$:

$$\overrightarrow{v} = -v \cdot \cos(\alpha) \cdot \overrightarrow{u_r} + v \cdot \sin(\alpha) \cdot \overrightarrow{u_\theta} \tag{59}$$

L'expression générale du vecteur vitesse dans cette base est :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r} \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta} \tag{60}$$

On obtient par identification :

$$\dot{r} = -v \cdot \cos(\alpha) \tag{61}$$

$$r \cdot \dot{\theta} = v \cdot \sin(\alpha) \tag{62}$$

La valeur initiale de r correspond au deux tiers de la hauteur h d'un triangle équilatéral dont chaque côté a pour longueur « a ».

$$r_0 = \frac{2}{3} \cdot \left(a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'où l'expression de r :

$$\boxed{r = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - v \cdot \cos(\alpha) \cdot t} \tag{63}$$

Cette relation permet d'obtenir simplement **la durée totale de la poursuite** :

$$t_1 = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2a}{3v} \tag{64}$$

Une « division membre à membre » de (40) par (39) conduit à :

$$\tan(\alpha) = -\frac{r \cdot \dot{\theta}}{\dot{r}} \quad \text{soit :} \quad \frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\dot{\theta}}{\tan(\alpha)} \tag{65}$$

Les primitives par rapport à t sont égale à une constante K près :

$$\ln(r) = -\frac{\theta}{\tan(\alpha)} + K \tag{66}$$

Pour $r = r_0 : \theta = 0$; donc : $K = \ln(r_0)$. On obtient ainsi **l'équation polaire de la trajectoire du chat** parti du point A :

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{\theta}{\tan(\alpha)} \tag{67}$$

$$\boxed{r = r_0 \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{\tan(\alpha)}\right) = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot e^{-\sqrt{3}\cdot\theta}} \tag{68}$$

La trajectoire est une **spirale logarithmique**. Il s'agit de la courbe dessinée en bleu sur la figure n° 5. Bien sûr, les trajectoires des deux autres chats se déduisent de celle-ci par des rotations autour de G de 120° et 240°.

Généralisation à un nombre N de chats.

Le problème peut se généraliser à un ensemble d'un nombre N quelconque de chats occupant à l'instant initial les N sommets d'un polygone régulier de centre G ($N \geq 3$). Les règles de la poursuite sont identiques. On montre de la même façon qu'à une date t quelconque, les N chats occupent encore les sommets d'un polygone régulier de centre G. L'étude de la trajectoire d'un chat s'effectue de la même manière. L'angle α étant toujours égal au demi angle au sommet du polygone régulier. Dans le cas général, deux chats consécutifs sont vus du centre de gravité G sous l'angle $2\beta = \frac{2\pi}{N}$ (voir figure tracée dans le cas particulier N=4). L'angle α déjà défini vaut ainsi :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} = \pi \cdot \frac{N-2}{2N} \tag{69}$$

La distance initiale d'un chat au centre de gravité G vaut :

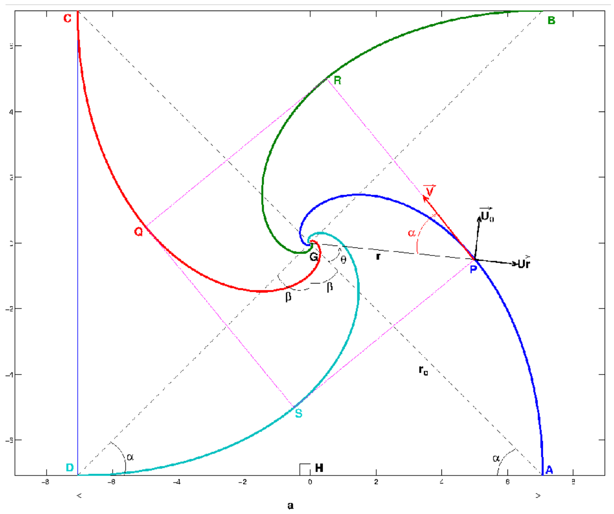


FIGURE 8 –

$$r_o = \frac{AH}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{2 \cdot \cos(\alpha)} \tag{70}$$

L'intégration de la relation (39)conduit à :

$$r = r_o - v \cdot \cos(\alpha) \cdot t \tag{71}$$

Cela conduit à une durée de poursuite égale à :

$$t_N = \frac{r_o}{v \cdot \cos(\alpha)} = \frac{a}{2v \cdot \cos^2(\alpha)} \tag{72}$$

Les résultats correspondant aux formules (44) à (46) restent valides. La trajectoire de chaque chat est une spirale logarithmique d'équation polaire :

$$r = r_0 \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{\tan(\alpha)}\right) = \frac{a}{2 \cdot \cos(\alpha)} \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{\tan(\alpha)}\right) \tag{73}$$

Dans le cas N=4, cela correspond à $\alpha = \frac{\pi}{4} rad$ et à $r_0 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ où « a » désigne la longueur d'un côté du carré.
La durée totale de la poursuite est :

$$t_2 = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{v \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a}{v} \tag{74}$$

L'équation polaire de la trajectoire d'un chat peut s'écrire :

$$\boxed{r = r_0 \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{\tan(\alpha)}\right) = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\theta}} \tag{75}$$

Les quatre trajectoires sont représentées ci-dessus figure n° 6.

Là encore, **cliquer sur un des deux liens ci-dessous, fournit une animation** représentant les positions successives à intervalles de temps égaux des quatre chats. On constate qu'à chaque instant, les chats occupent les quatre sommets d'un carré. Au cours du temps, ce carré tourne autour du point fixe G et la longueur de chaque côté décroît au cours du temps et tend vers zéro.

Animation au format .avi   **Animation au format .mp4**

retour à la page principale