

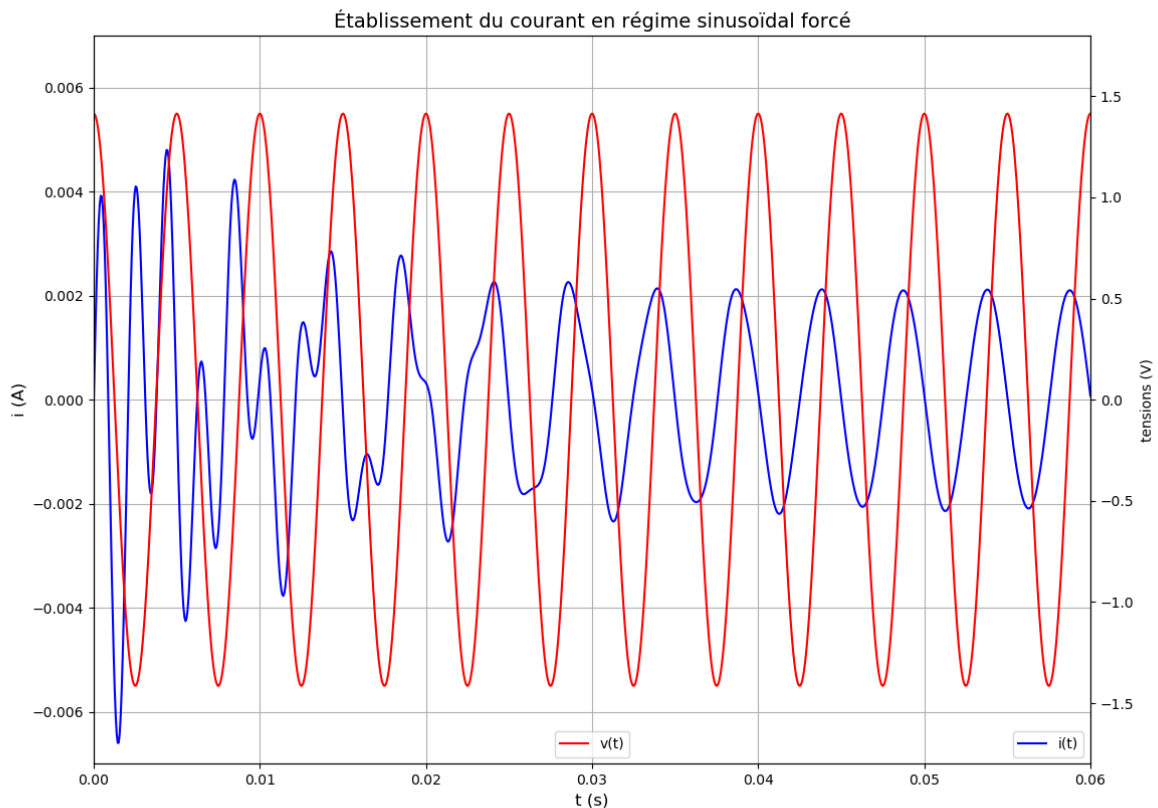
Utilisations des nombres complexes appliquées à l'étude des régimes sinusoïdaux

Résumé

Il s'agit bien sûr d'un grand classique, tellement classique que parfois les professeurs considèrent la méthode comme acquise. Cette fiche pourra aider les étudiants qui commencent l'étude des circuits électriques en régimes sinusoïdaux établis. Un peu moins classique : la méthode permettant d'obtenir l'équation différentielle vérifiée en régime quelconque à partir de l'étude à l'aide des complexes est développée. Je fournis également une démonstration du théorème de Bouchereau sur les puissances active et réactive et une étude sur l'adaptation d'impédance.

1 Dipôle en régime sinusoïdal établi.

1.1 Établissement du régime sinusoïdal.



Imaginons un circuit électrique quelconque (je choisis l'exemple du circuit RLC série) que l'on relie à la date $t=0$, en fermant un interrupteur (K), à un générateur de tension sinusoïdale de valeur instantanée :

$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (1)$$

avec :

V_m : amplitude la tension instantanée (valeur maximale)

$(\omega \cdot t)$: phase de la tension instantanée (mesure en radians)

ω : pulsation de la tension instantanée (mesurée en rad/s)

La pulsation est reliée à la fréquence f et à la période T par les relations :

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Pour $t \geq 0$, l'intensité instantanée traversant le circuit $i(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante qui s'établit simplement en écrivant la loi d'addition des tensions :

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = v(t) \quad (3)$$

On fait disparaître la primitive en dérivant tous les termes par rapport au temps :

$$L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega \cdot V_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4)$$

On démontre en cours de mathématique que la solution générale est la somme de deux termes :

1° : La solution de l'équation différentielle homogène correspondant au cas particulier $V_m = 0$:

$$L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Cette solution correspond à un régime transitoire qui s'amortit rapidement au point de devenir d'influence totalement négligeable au bout de quelques périodes. Ce régime est étudié en détail ici : `regime_transitoire` avec cependant des conditions initiales différentes.

2° : La solution correspondant au régime sinusoïdal forcé, c'est à dire la solution où toutes les grandeurs variables du problème sont des fonctions sinusoïdales de temps ayant la même pulsation que celle imposée par le générateur.

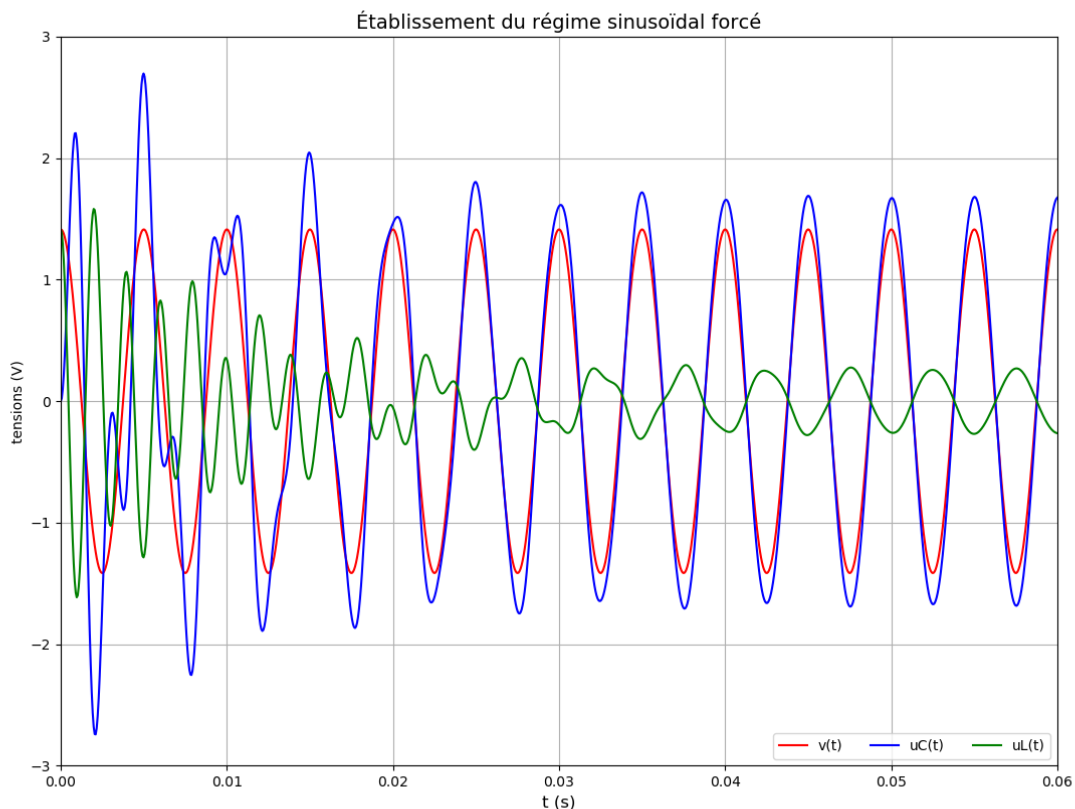
Ce résultat est illustré sur la simulation ci-dessus correspondant au cas particulier :

$$L=0,1\text{H}; C=1\mu\text{F}; R=20\Omega; f=200\text{Hz}; V_m=1,41\text{V}.$$

Remarque : une telle amplitude de la tension correspond à une valeur efficace $V_e = 1,00\text{V}$.

La courbe rouge correspond à la tension $v(t)$: on obtient bien une sinusoïde. La courbe bleue correspond à l'intensité instantanée $i(t)$. La superposition du régime sinusoïdal et du régime transitoire rend les variations de $i(t)$ assez « compliquées » sur les premières périodes mais, au bout d'une dizaine de périodes environ, le régime transitoire est totalement amorti : on obtient une variation de $i(t)$ sinusoïdale, de même période que $v(t)$ mais déphasée.

On peut faire les mêmes remarques concernant l'évolution de la tension $u_L(t)$ aux bornes de l'inductance (courbe verte de la simulation ci-dessous) et concernant l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur. Après une évolution assez « compliquée » sur les premières périodes, chaque tension devient une tension sinusoïdale de même période celle de $v(t)$ mais avec un déphasage par rapport à $v(t)$.



Dorénavant, nous allons nous limiter à l'étude du régime sinusoïdal forcé : chaque tension, chaque intensité est fonction sinusoïdale du temps ayant une fréquence commune imposée par un générateur. En revanche, des déphasages peuvent exister entre ces grandeurs instantanées.

1.2 Petit rappel de mathématiques sur le nombre complexes.

Le physicien à l'aise en mathématiques peut « sauter » ce paragraphe !

Soit le complexe $z = x + jy$ où x et y sont deux réels, avec $j^2 = -1$.

1.2.1 Module et argument

Le complexe peut s'écrire sous la forme : $z = |z| \cdot \exp(j \cdot \varphi)$ avec :
module du complexe :

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5)$$

Remarque : On peut définir le complexe conjugué de z :

$$z^* = x - jy = |z| \cdot \exp(-j \cdot \varphi) \quad (6)$$

Dans certains contextes, il peut être intéressant de calculer le module d'un complexe en remarquant :

$$|z|^2 = z \cdot z^* \quad (7)$$

L'argument φ du complexe (exprimé en radians) est donc :

$$\varphi = \arg(x + jy) \quad (8)$$

il vérifie les égalités suivantes :

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{|z|} \quad ; \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{|z|}} \quad (9)$$

Le plus souvent, on calcule la tangente et on lève l'indétermination à π radians près introduite par la connaissance de la tangente en considérant que le sinus est du signe de la partie imaginaire ou que le cosinus est du signe de la partie réelle.

1.2.2 Somme et différence de deux complexes

Il est préférable de raisonner sur les parties réelles et imaginaires. Si :

$$z_1 = x_1 + jy_1 \quad ; \quad z_2 = x_2 + jy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad ; \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (10)$$

1.2.3 Produit et quotient de deux complexes

Il est préférable de raisonner à partir des modules et des arguments :

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \exp[j(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (11)$$

Pour le produit : le module est le produit des modules, l'argument est la somme des arguments.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \exp[j(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (12)$$

Pour le quotient : le module est le quotient des modules, l'argument est la différence des arguments.

1.2.4 Argument d'un complexe et arc-tangente

Sachant que : $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$, il pourrait être tentant d'écrire : $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. La situation n'est pas aussi simple. En effet, pour que la fonction arc-tangente soit bijective, elle n'est définie que pour des angles compris entre $-\frac{\pi}{2}rad$ et $\frac{\pi}{2}rad$. L'égalité n'est donc valide que si $\cos(\varphi) \geq 0$, donc que pour $x \geq 0$. Nous avons donc :

$$\boxed{\varphi = \arg(x + jy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{si : } x \geq 0} \quad (13)$$

Dans le cas où la partie réelle est négative, on peut obtenir une expression faisant intervenir un arc-tangente en multipliant le complexe par $1 = -(-1) = -\exp(j\pi)$. Puisque $(-x) > 0$: $\arg(-x - jy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Ainsi :

$$\varphi = \arg(x + jy) = \arg[(-x - jy) \cdot \exp(j\pi)]$$

En tenant compte de (11) :

$$\varphi = \arg(-x - jy) + \pi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

Conclusion :

$$\boxed{\varphi = \arg(x + jy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{si : } x < 0} \tag{14}$$

Remarque : les arguments sont définis modulo 2π . Il est donc tout à fait possible de soustraire 2π à l'expression (14) :

$$\boxed{\varphi = \arg(x + jy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \quad \text{si : } x < 0} \tag{15}$$

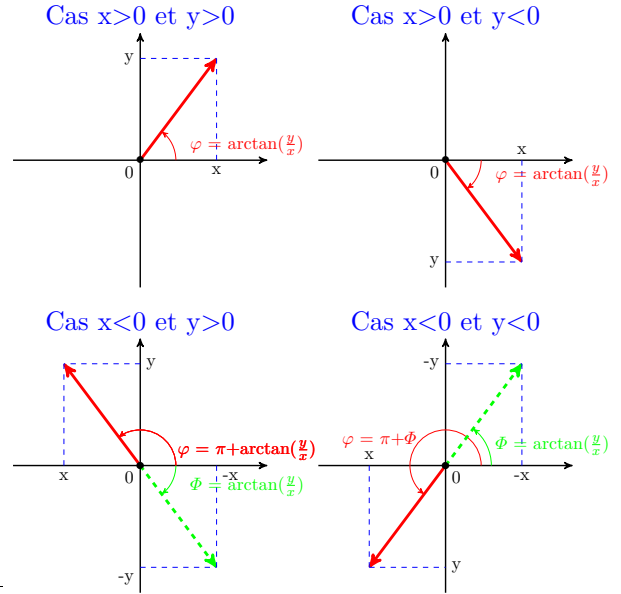


FIGURE 1 –

1.3 Complexe associé à une grandeur fonction sinusoïdale du temps

Appelons φ le déphasage entre la tension instantanée $v(t)$ et l'intensité instantanée $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé :

$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad ; \quad i(t) = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \tag{16}$$

Remarque n° 1 : nous avons bien ainsi :

$$\varphi = \text{Phase}(v(t)) - \text{Phase}(i(t)) = \omega \cdot t - (\omega \cdot t - \varphi)$$

Remarque n° 2 : il serait aussi possible de noter :

$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad ; \quad i(t) = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{17}$$

Nous aurions encore :

$$\varphi = \text{Phase}(v(t)) - \text{Phase}(i(t)) = (\omega \cdot t + \varphi) - \omega \cdot t$$

Le sens physique de φ est le même dans les deux cas, seule change le choix de l'instant initial : avec les notations (12), l'instant initial est choisi à un maximum de $v(t)$, avec le choix (13) l'instant initial est choisi à un maximum de $i(t)$.

Par soucis de cohérence avec les notations des paragraphes précédents, nous adopterons les notations (16) plutôt que (17). Pour illustrer ces deux choix possibles, voici, Figure n° 3, les courbes dans le cas : $\varphi = \frac{\pi}{2} \text{rad}$.

Par convention, le complexe associé à une grandeur instantanée fonction sinusoïdale du temps, symbolisé comme la grandeur instantanée mais en la soulignant, est défini ainsi :

Le module du complexe associé est l'amplitude de la grandeur instantanée ;

l'argument du complexe associé est la phase de la grandeur instantanée.

Ainsi :

$$\boxed{\text{si : } v(t) = V_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{alors : } \underline{v} = V_m \cdot \exp(j\omega \cdot t)} \tag{18}$$

$$\boxed{\text{si : } i(t) = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \quad \text{alors : } \underline{i} = I_m \cdot \exp[j(\omega \cdot t - \varphi)]} \tag{19}$$

Sachant que la partie réelle d'une somme algébrique de nombres complexes est la somme algébrique des parties réelles, on comprend bien que les lois de l'électrocinétique applicables aux valeurs instantanées sont directement applicables aux complexes associés. **Les lois des nœuds et des mailles s'appliquent ainsi aux complexes associés.**

1.4 Impédance complexe

Soit un dipôle orienté en convention récepteur, parcourue par le courant d'intensité instantanée $i(t)$ sous la tension instantanée $v(t)$. Par définition :

$$\underline{Z} = \frac{v}{i} \quad (20)$$

$$\underline{Z} = \frac{V_m \cdot \exp(j\omega \cdot t)}{I_m \cdot \exp[j(\omega \cdot t - \varphi)]} = \frac{V_m}{I_m} \cdot \exp(j\varphi) \quad (21)$$

On remarque ainsi que le module de l'impédance complexe est ce que l'on appelle simplement l'impédance Z du dipôle, c'est à dire le rapport des amplitudes de $v(t)$ et de $i(t)$, soit aussi le rapport des valeurs efficaces.

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e} \quad ; \quad \varphi = \arg(\underline{Z}) \quad (22)$$

Une impédance, comme une résistance, se mesure en ohms. Nous avons dit déjà que les lois des nœuds et des mailles s'appliquent aux complexes associés aux tensions et aux intensités instantanées. Il en résulte que les impédances complexes se manipulent comme les résistances en régime continu.

Rappelons les trois cas les plus classiques d'impédances complexes.

1.4.1 Impédance d'un conducteur ohmique

La loi d'Ohm est vérifiée à chaque instant :

$$V_m \cdot \cos(\omega \cdot t) = R \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \quad \forall t$$

Cela implique :

$$R = \frac{V_m}{I_m} \quad ; \quad \varphi = 0 \quad (23)$$

Selon (18) :

$$\underline{Z}_R = R \quad (24)$$

1.4.2 Impédance complexe d'une bobine de résistance négligeable

Relation entre valeurs instantanées :

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (25)$$

Donc :

$$V_m \cdot \cos(\omega \cdot t) = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall t \quad (26)$$

Par identification :

$$\frac{V_m}{I_m} = L \cdot \omega \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (27)$$

Selon (18) :

$$\underline{Z}_L = jL \cdot \omega \quad (28)$$

1.4.3 Impédance complexe d'un condensateur

Relation entre valeurs instantanées :

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = -C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \sin(\omega \cdot t) = C \cdot \omega \cdot V_m \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (29)$$

Par identification :

$$\frac{V_m}{I_m} = \frac{1}{C \cdot \omega} \quad ; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (30)$$

Selon (18) :

$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{C \cdot \omega} = \frac{1}{jC \cdot \omega} \quad (31)$$

1.4.4 Intérêt de la notion d'impédance complexe

Nous avons donc, pour un dipôle quelconque : $\underline{v} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$. Nous savons que les lois valides pour les intensités et les tensions en régime continu se transposent en régime variable aux complexes associés aux valeurs instantanées. Conséquence pratique : **il est possible de manipuler en régime sinusoïdal les impédances complexes comme on manipule en régime continu les résistances et leurs associations.**

1.5 Application au circuit RLC série

Nous reprenons le circuit défini au paragraphe 1.5 avec les valeurs numériques suivantes :

$$L=20\text{mH}; C=10\mu\text{F}; \\ R=40\Omega; f=250\text{Hz}; V_m=1,41\text{V (soit } V_e = 1,00\text{V)}.$$

1.5.1 Expression de l'intensité instantanée

Les trois dipôles sont associés en série. L'impédance complexe du circuit est ainsi :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad (32)$$

Le module de l'impédance, ce qu'on appelle simplement l'impédance du circuit, vaut :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad (33)$$

Application numérique :

$$Z = \sqrt{1600 + \left(10\pi - \frac{1}{5\pi \cdot 10^{-3}} \right)^2} \approx 51,4\Omega \quad (34)$$

On en déduit l'amplitude de l'intensité (valeur maximale) et sa valeur efficace :

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{1,41}{51,4} \approx 2,75 \cdot 10^{-3} \text{A} \quad ; \quad I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{1,00}{51,4} \approx 1,95 \cdot 10^{-2} \text{A} \quad (35)$$

Puisque la partie réelle de l'impédance complexe est positive, nous obtenons directement :

$$\varphi = \arg \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] = \arctan \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right) \quad (36)$$

Application numérique :

$$\varphi = \arctan \left(\frac{10\pi - \frac{1}{5\pi \cdot 10^{-3}}}{40} \right) \approx -0,678 \text{rad} \approx -38,9^\circ \quad (37)$$

$\varphi < 0$: la tension instantanée est en retard de phase par rapport à l'intensité instantanée. **Attention : « plus tard » signifie « plus à droite » dans le repère où l'axe des temps est orienté positivement vers la droite.** Cela apparaît clairement sur les courbes ci-dessous, figure 4. Puisque la tension aux bornes de la résistance vaut à chaque instant : $u_R(t) = R \cdot i(t)$, cette tension est en phase avec l'intensité instantanée. On remarque que les maxima correspondant à $v(t)$ (courbe rouge) apparaissent un peu après ceux correspondant à $u_R(t)$ (courbe bleu).

1.5.2 Expression de la tension instantanée aux bornes de l'inductance

L'expression du complexe associé à l'intensité étant établi, il suffit d'écrire :

$$\underline{u}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{i} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}} \cdot \underline{v} = \frac{jL\omega}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} \cdot \underline{v} \quad (38)$$

Remarque : Si l'expression de l'intensité n'avait pas été obtenue auparavant, il aurait été possible d'obtenir directement cette expression en utilisant la notion de diviseur de tension.

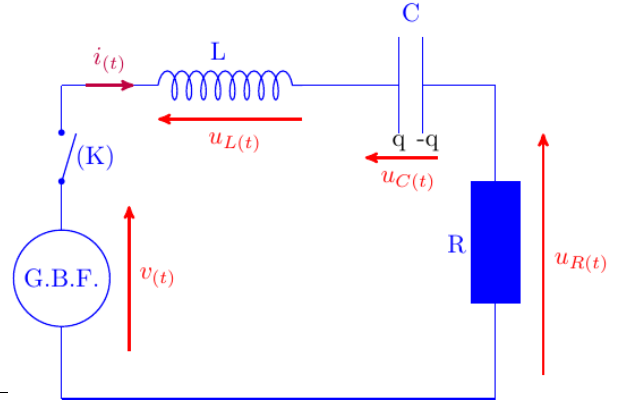


FIGURE 3 –

Posons la tension instantanée sous la forme :

$$u_{L(t)} = U_{Lm} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_L) \quad (39)$$

ainsi φ_L désigne le déphasage de $u_{L(t)}$ par rapport à $v(t)$:

$$\varphi_L = \text{Phase}(u_{L(t)}) - \text{Phase}(v(t)) = (\omega \cdot t + \varphi_L) - \omega \cdot t \quad (40)$$

En utilisant les résultats déjà acquis :

$$U_{Lm} = \frac{|Z_L|}{|Z|} \cdot V_m = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \cdot V_m \quad (41)$$

Application numérique :

$$U_{Lm} = \frac{10\pi}{51,4} \cdot 1,41 \approx 0,865V \quad (42)$$

$$\varphi_L = \arg\left(\frac{Z_L}{Z}\right) = \arg(jL\omega) - \arg(Z) = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \quad (43)$$

Application numérique :

$$\varphi_L = \frac{\pi}{2} + 0,678 \approx 2,25rad \approx 129^\circ \quad (44)$$

Cela apparaît bien sur le graphe ci-dessus : on y vérifie bien que la tension $u_L(t)$ (courbe verte) est en avance de phase de 90° par rapport à $i(t)$ ou $u_R(t)$ (courbe bleue). On dit que $u_L(t)$ est en quadrature de phase avance par rapport à $i(t)$. Dans le cas d'une quadrature de phase : à une valeur nulle d'une grandeur sinusoïdale correspond un extremum de l'autre grandeur sinusoïdale. Cela se vérifie aisément sur le graphe ci-dessus.

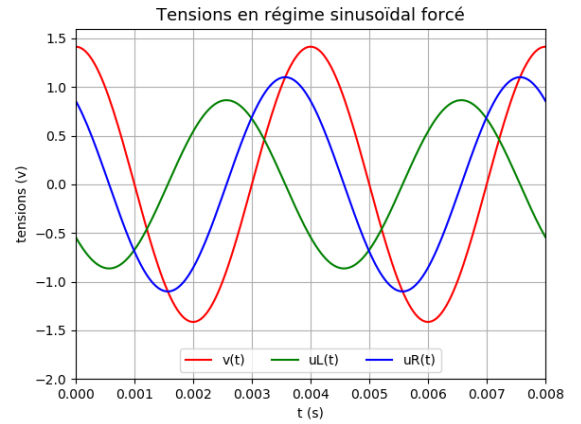


FIGURE 4 –

2 Application des complexes à l'établissement d'une équation différentielle

2.1 Principe général de la méthode

Concernant l'inductance pure en régime sinusoïdal, nous avons montré :

$$u_{L(t)} = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \longrightarrow \quad \underline{u_L} = L \cdot (j\omega \cdot \underline{i})$$

Nous remarquons que le complexe associé à la dérivée par rapport à t d'une grandeur fonction sinusoïdale du temps s'obtient en multipliant le complexe associé à cette grandeur instantanée par $j\omega$. Ce résultat peut se généraliser à la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport au temps en régime sinusoïdal établi :

$$\boxed{\text{si : } g(t) = \frac{d^n h(t)}{dt^n} \quad \text{alors : } \underline{g} = (j\omega)^n \cdot \underline{h}} \quad (45)$$

Un raisonnement analogue peut se faire pour les primitives. Concernant le condensateur, nous avons montré :

$$u_{C(t)} = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt \quad \longrightarrow \quad \underline{u_C} = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{\underline{i}}{j\omega}\right) \quad (46)$$

Très logiquement, compte tenu du résultat sur la dérivation, le complexe associé à une primitive d'une grandeur fonction sinusoïdale du temps s'obtient en divisant par $j\omega$ le complexe associé à la grandeur instantanée. Cependant, par la suite, nous préférons toujours les dérivations dans la mesure où une primitive est définie à une constante près pas nécessairement facile à déterminer.

Lorsqu'il faut déterminer l'équation différentielle vérifiée par une grandeur instantanée $u(t)$, il est possible de procéder de la façon suivante :

- 1° : établir l'expression vérifiée par le complexe \underline{u} en supposant le régime sinusoïdal ;
- 2° : en déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ en utilisant le résultat (45) ;
- 3° : considérer que cette équation différentielle est valide en régime quelconque (régime transitoire...).

2.2 Exemple d'utilisation de la méthode

On considère que pour $t < 0$, l'interrupteur (K) est ouvert, le condensateur est déchargé et aucun courant ne circule. On ferme l'interrupteur à l'instant de date $t = 0$. Il s'agit d'établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. Raisonner directement sur les valeurs instantanées est possible mais assez délicat compte tenu de la complexité du circuit. Nous allons utiliser la méthode qui vient d'être présentée. L'impédance complexe de l'association en parallèle du condensateur et de la bobine d'inductance L et de résistance R s'écrit :

$$\underline{Z}_e = \frac{\frac{1}{jC\omega} \cdot (R + jL\omega)}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (47)$$

Ce dipôle, en série avec la bobine (L, R) constitue un diviseur de tension :

$$\underline{u} = \underline{v} \cdot \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e + R + jL\omega} \quad (48)$$

$$\underline{u} = \underline{v} \cdot \frac{\frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}{\frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} + R + jL\omega} \quad (49)$$

$$\underline{u} = \underline{v} \cdot \frac{R + jL\omega}{(R + jL\omega) \cdot (2 - LC\omega^2 + jRC\omega)}$$

$$\underline{u} = \underline{v} \cdot \frac{1}{2 - LC\omega^2 + jRC\omega} \quad (50)$$

Donc :

$$2u + RC \cdot (j\omega \cdot u) + LC \cdot (j\omega)^2 \cdot u = v \quad (51)$$

Nous en déduisons l'équation différentielle vérifiée par les valeurs instantanées :

$$\boxed{LC \cdot \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + RC \cdot \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) = v(t) = E} \quad (52)$$

Pour résoudre cette équation différentielle du deuxième degré, il faut connaître deux conditions initiales :

1° : La continuité de la tension à la date $t = 0$ impose la continuité de $u(t)$ en $t = 0$, ce qui conduit à :

$$\boxed{u(0+) = 0} \quad (53)$$

2° : La continuité de l'intensité dans une branche contenant une inductance en $t = 0$ impose :

$$i(0+) = i_1(0+) = 0 \quad (54)$$

La loi des nœuds conduit à :

$$i_2(0+) = i(0+) - i_1(0+) = 0 \quad (55)$$

Or, de façon générale :

$$i_2(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Donc :

$$\boxed{\left[\frac{du}{dt} \right]_{t=0+} = 0} \quad (56)$$

En cas de difficultés à résoudre l'équation différentielle (52), consulter la fiche suivante : equation différentielle second ordre. Voici, au-dessus, en guise d'illustration, une simulation obtenue pour les valeurs numériques suivantes :

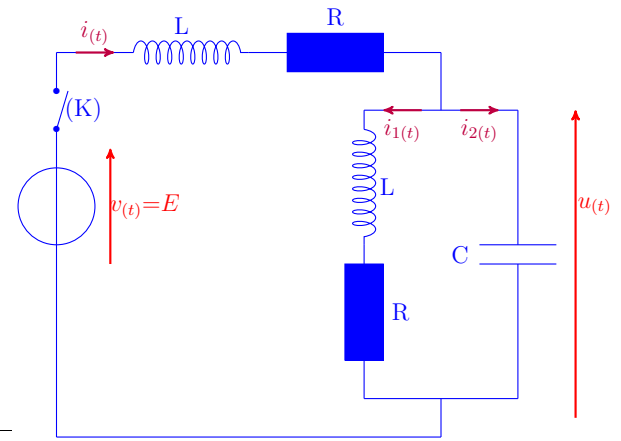


FIGURE 5 -

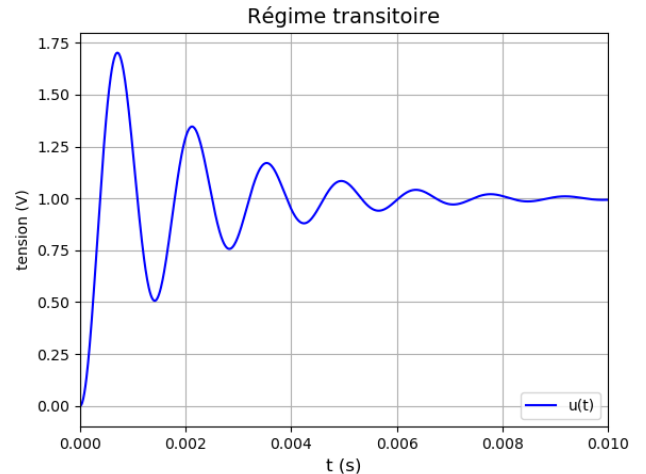


FIGURE 6 -

$$L=0,1H; C=1\mu F; R=100\Omega; E=2V.$$

La courbe $u(t)$ est tracée en vert, la courbe $v(t)$ est tracée en rouge. On retrouve les caractéristiques prévues : la courbe $u(t)$ passe par l'origine du repère comme prévu par (53) et la tangente à la courbe en $t = 0$ est horizontale comme prévu par (56). On peut aussi dire que la limite asymptotique (horizontale en pointillés noirs) correspond à la solution particulière obtenue en considérant les dérivées par rapport au temps nulles. Selon (52), cette limite est :

$$u_p = \frac{E}{2} = 1V$$

Ce qui est conforme à la simulation numérique effectuée figure n° 6.

3 Application des complexes à l'étude des puissances

3.1 Rappel sur les notions de puissances instantanée et moyenne

Pour un dipôle **orienté en convention récepteur** et fonctionnant en régime sinusoïdal, la puissance instantanée reçue $p(t)$ est définie par analogie avec la puissance définie en régime continue :

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (57)$$

Soit :

$$p(t) = V_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cdot \cos(\varphi) + \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cdot \cos(2\omega \cdot t - \varphi)$$

La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale du temps sur une durée égale à une période ou à un multiple d'une période est nulle. De plus, la valeur moyenne au cours du temps d'une grandeur constante est égale à cette constante. La puissance moyenne reçue, calculée sur une durée égale à une période ou à un multiple d'une période vaut donc :

$$P = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos(\varphi) = V_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi) \quad (58)$$

compte tenu de la relation entre valeur moyenne et valeur efficace.

Remarque n° 1 : on arrive évidemment à ce résultat en utilisant la définition mathématique de la valeur moyenne :

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) \cdot dt \quad (59)$$

Remarque n° 2 : la puissance moyenne P est aussi appelée **puissance active**.

Remarque n° 3 : La figure 7 ci-dessus illustre bien les propos précédents. La période de $p(t)$ est la moitié de celle de $v(t)$: 2ms au lieu de 4ms. La valeur moyenne de $p(t)$ n'est pas nulle; avec le circuit défini au paragraphe 1.5, elle vaut : $P=15,1mW$.

3.2 Puissance complexe

Attention au piège ! Compte tenu de la manière d'associer grandeur sinusoïdale instantanée et complexe, on pourrait être tenté de poser : $\underline{p} = \underline{v} \cdot \underline{i}$. Pour des raisons qui vont apparaître progressivement, il est préférable de poser :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \cdot \underline{v} \cdot \underline{i}^* \quad (60)$$

où \underline{i}^* désigne le conjugué du complexe associé à l'intensité instantanée. Ainsi :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot \exp(j\omega \cdot t) \cdot I_m \cdot \exp[-j(\omega \cdot t - \varphi)] = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \exp(j\varphi) \quad (61)$$

Ou encore :

$$\underline{p} = V_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi) + j \cdot V_e \cdot I_e \cdot \sin(\varphi) \quad (62)$$

Cette puissance complexe peut ainsi s'écrire sous la forme :

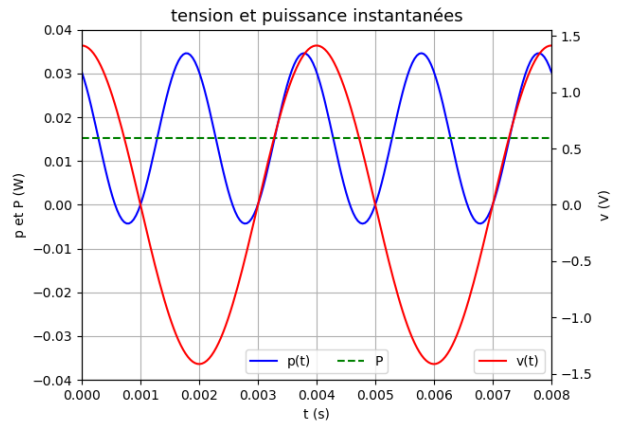


FIGURE 7 –

$$\underline{p} = P + jQ \quad (63)$$

Avec :

$\mathbf{P} = V_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi)$: **puissance moyenne ou active déjà définie** ;

$\mathbf{Q} = V_e \cdot I_e \cdot \sin(\varphi)$: **puissance réactive**.

Cette puissance réactive ne correspond pas à une puissance électrique consommée ; il s'agit juste d'une grandeur dont la connaissance peut être utile à l'étude du circuit comme nous allons le voir, à propos du théorème de Boucherot notamment. Pour bien marquer cette différence de propriétés par rapport à la puissance active, la puissance réactive est usuellement exprimée en VAR (voltampère réactif) même si, du point de vue dimensionnel, Q a la dimension d'une puissance qui pourrait donc se mesurer en watts, comme la puissance active P.

Le produit $S = V_e \cdot I_e$ est appelé **puissance apparente**. Pour bien faire la différence avec la puissance active, l'habitude est de l'exprimer en voltampères (VA).

$\cos(\varphi)$ est une valeur comprise entre zéro et un pour les dipôles usuels puisque : $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{rad}$. Cette grandeur s'appelle : **facteur de puissance**.

La puissance active est donc inférieure ou égale à la puissance apparente.

3.3 Applications aux trois dipôles usuels R,L,C

3.3.1 Cas du conducteur ohmique de résistance R

$\underline{Z}_R = R$. Selon (23), ce dipôle ne produit pas de déphasage entre tension instantanée et intensité instantanée :

$$\cos(\varphi_R) = 0 \quad ; \quad V_e = R \cdot I_e \quad ; \quad \sin(\varphi_R) = 0 \quad (64)$$

$$\boxed{P_R = V_e \cdot I_e = R \cdot I_e^2 = \frac{V_e^2}{R} \quad ; \quad Q_R = 0} \quad (65)$$

3.3.2 Cas d'une inductance pure L

$\underline{Z}_L = jL\omega = L\omega \cdot \exp(j\frac{\pi}{2})$. Ce dipôle produit une avance de phase de $\frac{\pi}{2} \text{rad}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$:

$$\cos(\varphi_L) = 0 \quad ; \quad \sin(\varphi_L) = 1 \quad ; \quad V_e = L\omega \cdot I_e \quad (66)$$

$$\boxed{P_L = 0 \quad ; \quad Q_L = L\omega \cdot I_e^2 = \frac{V_e^2}{L\omega}} \quad (67)$$

3.3.3 Cas d'un condensateur de capacité C

$\underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} \cdot \exp(-j\frac{\pi}{2})$. Ce dipôle produit un retard de phase de $\frac{\pi}{2} \text{rad}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$:

$$\cos(\varphi_C) = 0 \quad ; \quad \sin(\varphi_C) = -1 \quad ; \quad V_e = \frac{I_e}{C\omega} \quad (68)$$

$$\boxed{P_C = 0 \quad ; \quad Q_C = -C\omega \cdot V_e^2 = -\frac{I_e^2}{C\omega}} \quad (69)$$

3.3.4 Cas d'un dipôle quelconque

L'impédance complexe peut, dans le cas général s'écrire sous la forme :

$$\underline{Z} = R + jX \quad (70)$$

où R et X sont deux réels. R représente la résistance du dipôle, X sa réactance ; R et X se mesurent en ohms. On suppose le dipôle orienté en convention récepteur :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \cdot \underline{v} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} \underline{Z} \cdot \underline{i} \cdot \underline{i}^* = \underline{Z} \cdot I_e^2 = R \cdot I_e^2 + j \cdot X \cdot I_e^2$$

Par identification avec la relation (63) :

$$\boxed{P = R \cdot I_e^2 \quad ; \quad Q = X \cdot I_e^2} \quad (71)$$

3.4 Application au théorème de Bouchereau

3.4.1 Cas de deux dipôles en série

La loi sur l'addition des tensions instantanées s'applique aux complexes associés :

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$$

La puissance complexe reçue par l'association s'écrit :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} \underline{v}_1 \cdot \underline{i}^* + \frac{1}{2} \underline{v}_2 \cdot \underline{i}^* \quad (72)$$

Trois remarques importantes déduites de cette relation (72) :

1° : la puissance complexe reçue par l'association est égale à la somme des puissances complexes reçues par les dipôles de l'association.

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires :

2° : la puissance active reçue par l'association est égale à la somme des puissances actives reçues par les dipôles de l'association.

3° : la puissance réactive reçue par l'association est égale à la somme des puissances réactives reçues par les dipôles de l'association.

3.4.2 Cas de deux dipôles en parallèle

La loi des nœuds conduit à :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$$

La tension instantanée est commune aux deux dipôles. La puissance complexe reçue par l'association s'écrit :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{i}_1^* + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{i}_2^* \quad (73)$$

Cette relation conduit aux trois mêmes remarques que celles faites pour l'association série.

3.4.3 Généralisation à une association quelconque de dipôles linéaires; théorème de Bouchereau

Quelle que soit le type d'association des dipôles, on peut retenir :

la puissance complexe reçue par l'association est égale à la somme des puissances complexes reçues par les dipôles de l'association.

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient un résultat connu sous le nom de **théorème de Bouchereau** :

1° : la puissance active reçue par l'association est égale à la somme des puissances actives reçues par les dipôles de l'association.

2° : la puissance réactive reçue par l'association est égale à la somme des puissances réactives reçues par les dipôles de l'association.

Remarque : l'utilisation de ce théorème de Bouchereau permet d'étudier assez simplement des circuits pas trop compliqués en régime sinusoïdal sans l'aide des complexes. La méthode est souvent utilisée dans l'enseignement technique en lycée.

3.5 Application au circuit RLC étudié au paragraphe 1.5

Nous allons d'abord nous servir de la notion de puissance complexe même si cette méthode n'est pas indispensable pour un circuit aussi simple. La puissance complexe reçue peut s'écrire :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \frac{\underline{v}^*}{\underline{Z}^*} \quad (74)$$

En utilisant la propriété (7) sur le produit d'un complexe par son conjugué, cela donne :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R - j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{V_e^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \cdot \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \quad (75)$$

D'où la puissance active (ou moyenne) consommée par l'association série RLC :

$$P = \Re_e(\underline{p}) = \frac{R \cdot V_e^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad (76)$$

Remarque n° 1 : la puissance moyenne peut aussi s'écrire :

$$P = \frac{R \cdot V_e^2}{Z^2} = R \cdot I_e^2 = P_R \quad (77)$$

Le théorème de Bouchereau concernant la puissance active est bien vérifié :

$$P = P_R + P_L + P_C \quad \text{puisque : } P_L = P_C = 0 \quad (78)$$

Remarque n° 2 : l'étude complète du circuit peut se faire sans utiliser la méthode des complexes mais en utilisant le théorème de Bouchereau. Concernant la puissance active :

$$V_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi) = R \cdot I_e^2 \quad ; \quad V_e \cdot \cos(\varphi) = R \cdot I_e \quad (79)$$

Concernant la puissance réactive :

$$V_e \cdot I_e \cdot \sin(\varphi) = L\omega \cdot I_e^2 - \frac{I_e^2}{C\omega} \quad ; \quad V_e \cdot \sin(\varphi) = L\omega \cdot I_e - \frac{I_e}{C\omega} \quad (80)$$

Une division « membre à membre de (78) par (77) donne directement le résultat (36) :

$$\tan(\varphi) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad \text{avec selon (77) : } \cos(\varphi) \geq 0$$

En élevant (79) et (80) au carré puis en effectuant une somme « membre à membre », on obtient le résultat (33) :

$$V_e^2 = \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] \cdot I_e^2 \quad ; \quad I_e = \frac{V_e}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \quad (81)$$

3.6 Sens physiques et intérêts des différentes puissances

3.6.1 Puissance apparente

Les installations électriques sont dimensionnées pour que les fils de connexion ne subissent pas d'échauffement excessif par effet Joule, échauffement susceptible de causer la fonte des isolants entourant les fils. L'intensité efficace ne doit donc pas dépasser une certaine valeur sous peine de détérioration de l'installation. Puisque la tension normale d'utilisation (tension nominale efficace) est imposée (230V en France pour les installations monophasées), il est fréquent d'imposer la puissance maximale apparente. Par exemple, un abonnement EDF pour particulier peut correspondre à une puissance apparente maximale de 9kVA. Cela signifie :

$$I_{e(max)} \cdot V_e = S_{max} \quad ; \quad I_{e(max)} = \frac{9 \cdot 10^3}{230} = 39,1A \quad (82)$$

En pratique, un disjoncteur déconnecte l'installation domestique du réseau dès que l'intensité efficace dépasse 40A. La puissance maximale apparente est aussi utilisée de la même manière pour caractériser les transformateurs.

3.6.2 Puissance moyenne ou active

C'est d'elle que dépend l'énergie électrique consommée par une installation et facturée par le producteur (EDF en France). Sur une durée t_1 , l'énergie électrique consommée s'écrit :

$$W_e = \int_0^{t_1} p(t) \cdot dt \quad (83)$$

Compte tenu de la définition de la puissance moyenne (59), l'énergie consommée en une période vaut :

$$W'_e = \int_0^T p(t) \cdot dt = P \cdot T$$

Habituellement, on désire déterminer l'énergie électrique consommée sur une durée t_1 grande devant la période :

$$t_1 = n \cdot T + \varepsilon \quad \text{avec : } n \gg 1 \quad \text{et : } \varepsilon \ll t_1$$

Ainsi :

$$W_e \approx n \cdot W'_e \quad \text{soit : } W_e \approx P \cdot n \cdot T \approx P \cdot t_1 \quad (84)$$

Un compteur électrique d'énergie est constitué d'un dispositif de mesure de puissance moyenne associé à un intégrateur.

Remarque : il est fréquent de mesurer t_1 en heures ; dans ces conditions, on obtient l'énergie électrique exprimée en wattheures (Wh).

3.6.3 Puissance réactive

Retour rapide sur les deux applications les plus fréquentes de la notion de puissance réactive :

1° : application du théorème de Boucherot : comme déjà dit, il permet de résoudre de nombreux problèmes sur les installations en régime sinusoïdal sans utiliser la notion de nombres complexes. Il est beaucoup utilisé dès la classe de première en filière technologique.

2° : application à la détermination du facteur de puissance. La puissance facturée au consommateur est la puissance moyenne : $P = V_e \cdot I_e \cdot \cos(\varphi)$. Comme déjà dit : la tension efficace est imposée par le distributeur. Pour une même valeur du produit $I_e \cdot \cos(\varphi)$, la puissance enregistrée par le compteur est la même. Cependant, pour un faible facteur de puissance, I_e est plus élevée, la puissance perdue par effet Joule dans les fils électriques est plus importante. Pour une même énergie électrique consommée, l'énergie électrique perdue dans les lignes électriques par le distributeur (EDF en France) est plus importante. Pour tenir compte de cela, EDF installe chez les consommateurs industriels importants des enregistreurs qui permettent de connaître à la fois la puissance active P et la puissance réactive Q moyennes. On en déduit :

$$[\tan(\varphi)]_{moyen} = \frac{Q_{moyen}}{P_{moyen}} \quad (85)$$

Ces industriels ont des pénalités financières dès que : $[\tan(\varphi)]_{moyen} > 0,4$. Cela revient à imposer cette pénalité dès que le facteur de puissance devient inférieur à 0,93. Ces installations industrielles comportent le plus souvent des moteurs et/ou des fours à induction qui produisent une puissance réactive positive. L'industriel a tout intérêt alors à munir ses machines de condensateurs appropriés qui produisent une puissance réactive négative, faisant ainsi diminuer Q_{moyen} .

Quelques mots maintenant sur le sens physique de cette puissance réactive. Nous savons qu'elle est liée à la présence de bobines et de condensateurs. Nous allons prendre l'exemple du circuit RLC série de la figure 3, paragraphe 1.5. Les dipôles L et C accumulent de l'énergie électromagnétique :

* sous forme magnétique dans la bobine :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = L \cdot I_e^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t - \varphi) = \frac{1}{2} L \cdot I_e^2 + \frac{1}{2} L \cdot I_e^2 \cdot \cos(2\omega \cdot t - 2\varphi) \quad (86)$$

* sous forme électrique dans le condensateur : $E_{elec} = \frac{q^2}{2C}$ où q désigne la charge instantanée de l'armature gauche (sur le schéma) du condensateur. Il s'agit de la primitive sinusoïdale de $i(t)$:

$$q = \frac{I_m}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) \quad \text{donc : } E_{elec} = \frac{I_e^2}{C \cdot \omega^2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t - \varphi) = \frac{I_e^2}{2C \cdot \omega^2} - \frac{I_e^2}{2C \cdot \omega^2} \cdot \cos(2\omega \cdot t - 2\varphi) \quad (87)$$

D'où l'expression de l'énergie électromagnétique stockée par la bobine et le condensateur à la date t quelconque :

$$E_{em} = E_{mag} + E_{elec} = \frac{I_e^2}{2\omega} \cdot \left(L \cdot \omega + \frac{1}{C \cdot \omega} \right) + \frac{I_e^2}{2\omega} \cdot \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right) \cdot \cos(2\omega \cdot t - 2\varphi) \quad (88)$$

Puisque l'intensité passe en un quart de période de zéro à $\pm I_m$, la bobine emmagasine en un quart de période l'énergie magnétique $L \cdot I_e^2$ pour perdre cette énergie pendant le quart de période suivant où l'intensité revient à zéro et ainsi de suite ; l'énergie magnétique stockée varie donc périodiquement avec une période égale à $T/2$, ce qui est conforme à la formule (86). De même, le condensateur, en se chargeant et en se déchargeant périodiquement, stocke de l'énergie électrique pendant un quart de période pour la céder pendant le quart de période suivant. La formule (87) montre que l'énergie électrique varie périodiquement avec une période $T/2$ entre zéro (condensateur déchargé) et $\frac{I_e^2}{C \cdot \omega^2}$. L'expression de E_{mag} fait intervenir un cosinus au carré alors que celle de E_{elec} fait intervenir un sinus au carré : à un maximum d'une énergie correspond une valeur nulle de l'autre et vice et versa. Tout cela apparaît clairement sur les courbes ci-contre.

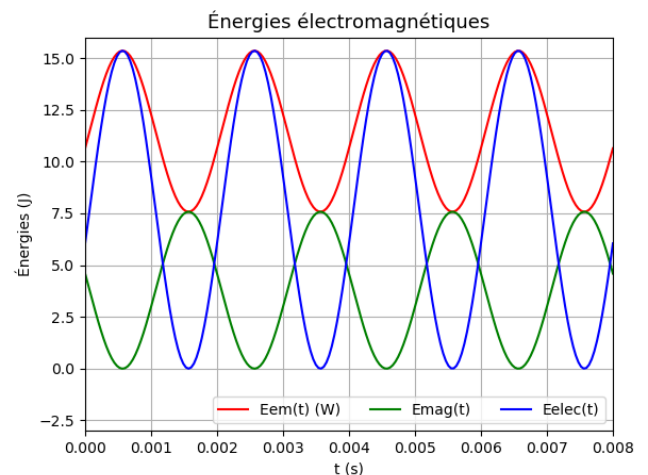


FIGURE 8 –

Remarque importante : cette énergie électromagnétique a été apportée au circuit lors du régime transitoire non étudié ici. Une fois le régime sinusoïdal établi, il y a toujours, au moins dans le cas général, transfert d'énergie électromagnétique entre le générateur et le circuit mais, **compte tenu de la périodicité de E_{em} , l'énergie fournie pendant un quart de période est égale à l'énergie reçue pendant le quart de période suivant. C'est pour cette raison qu'en moyenne sur une période, les dipôles L et C ne consomment aucune puissance.**

On peut d'ailleurs quantifier cette énergie électromagnétique transférée chaque quart de période entre le générateur et le circuit RLC série. L'énergie reçue pendant un quart de période correspond à un passage de $\cos(2\omega \cdot t - 2\varphi)$ de la valeur -1 à la valeur 1. Selon (88) :

$$\Delta E_{em} = \frac{I_e^2}{\omega} \cdot \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right) = \frac{T}{2\pi} \cdot Q \quad (89)$$

Bien sûr : le circuit cède cette quantité d'énergie au générateur pendant le quart de période suivant. On constate que le transfert d'énergie électromagnétique entre le générateur et le circuit est proportionnel à la puissance réactive Q .

Remarque : une puissance réactive nulle correspond à l'absence de transfert périodique d'énergie électromagnétique entre le circuit et le générateur. Cela ne signifie pas nécessairement l'absence d'énergie électromagnétique stockée dans le circuit. Cette situation peut correspondre à une énergie électromagnétique stockée indépendante du temps. Par exemple, dans le cas du circuit RLC série à la résonance d'intensité : $L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} = 0$; L'échange d'énergie électromagnétique se fait uniquement entre la bobine et le condensateur : quand le condensateur se charge, la bobine cède de l'énergie au condensateur ; quand il se décharge, le condensateur fournit de l'énergie à la bobine.

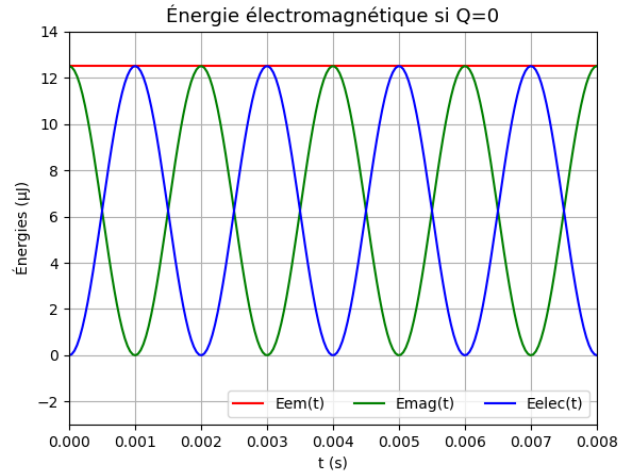


FIGURE 9 –

3.7 Application à l'adaptation d'impédance

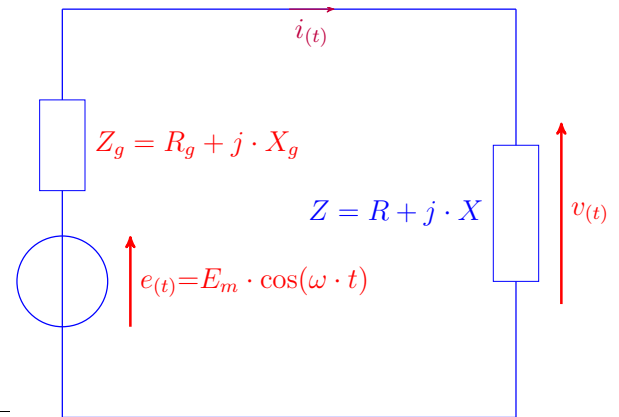
La sortie d'un générateur ou d'un quadripôle amplificateur est assimilable à un générateur linéaire de tension sinusoïdale de force électromotrice $e(t)$ et d'impédance de sortie $Z_g = R_g + jX_g$. R_g est la résistance de sortie du générateur, nécessairement positive; X_g est la réactance de sortie du générateur, cette grandeur peut être nulle, positive ou négative. Ce générateur alimente une charge (haut-parleur, lampe, entrée d'un amplificateur...) dont l'impédance peut s'écrire $Z = R + jX$ avec $R > 0$, la réactance X pouvant être quelconque. Il s'agit de déterminer les conditions sur l'impédance complexe de la charge pour que cette charge reçoive une puissance moyenne (active) maximale, l'amplitude E_m de la force-électromotrice étant imposée ainsi que l'impédance du générateur.

La loi de Pouillet conduit à une intensité complexe :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z} + \underline{Z}_g}$$

La tension complexe aux borne de la charge est :

FIGURE 10 –



$$\underline{v} = \underline{Z} \cdot \underline{i} \quad (90)$$

La puissance complexe reçue par la charge s'écrit :

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \cdot \underline{v} \cdot \underline{i}^* = \underline{Z} \cdot \left(\frac{\underline{e}}{\underline{Z} + \underline{z}_g} \right) \cdot \left(\frac{\underline{e}}{\underline{Z} + \underline{z}_g} \right)^* = \frac{1}{2} \cdot (R + jX) \cdot \frac{E_m \cdot \exp(j\omega \cdot t)}{R + R_g + j(X + X_g)} \cdot \frac{E_m \cdot \exp(-j\omega \cdot t)}{R + R_g - j(X + X_g)} \quad (91)$$

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \cdot (R + jX) \cdot \frac{E_m^2}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2} \quad (92)$$

On note E , la valeur efficace de la f.é.m. du générateur : $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$. La puissance moyenne reçue par la charge est la partie réelle de l'expression précédente :

$$P = \frac{R}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2} \cdot E^2 \quad (93)$$

Il s'agit donc d'ajuster les valeurs de R et de X pour rendre P maximum, les caractéristiques du générateur étant imposées. Concernant l'influence de X : aucun calcul de dérivée n'est nécessaire. Il faut choisir la valeur de X qui minimise le dénominateur. Le minimum d'un carré étant la valeur nulle, il suffit de poser :

$$X = -X_g \quad (94)$$

Ceci étant posé, le réglage de R nécessite un calcul de dérivée et un tableau de variations car R apparaît simultanément au numérateur et au dénominateur de (85). En posant maintenant :

$$P = \frac{R}{(R + R_g)^2} \cdot E_m^2 \tag{95}$$

la dérivée a pour expression :

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R + R_g)^2 - 2R(R + R_g)}{(R + R_g)^4} \cdot E^2 = \frac{(R + R_g) - 2R}{(R + R_g)^3} \cdot E^2 = \frac{R_g - R}{(R + R_g)^3} \cdot E^2 \tag{96}$$

d'où le tableau de variations :

R	0	R_g	∞
$\frac{dP}{dR}$	+	0	-
P	0	$\frac{E^2}{4R_g}$	0

Conclusion : pour que la charge reçoive une puissance moyenne maximale, son impédance complexe doit être égale au conjugué de l'impédance complexe du générateur :

$$P = P_{max} = \frac{E^2}{4R_g} \quad \text{si : } \underline{Z} = \underline{Z}_g^* \tag{97}$$

On dit alors que l'impédance de la charge est « adaptée » à celle du générateur. Cette adaptation est assez cruciale dans de nombreuses applications concrètes. Je choisis le cas de l'alimentation d'un haut-parleur par une dispositif dont la sortie se comporte comme un générateur de tension sinusoïdale d'impédance de sortie normalisée à $R_g = 8\Omega$ avec $X_g = 0$. Les haut-parleurs sont conçus pour avoir une réactance nulle à la fréquence de 1kHz et une impédance de 8Ω à cette fréquence. Dans le cas fréquent d'une réactance nulle, les variations de la puissance reçue par la charge en fonction de sa résistance R sont représentées ci-contre. On remarque qu'une résistance de la charge nettement plus faible que la résistance de sortie du générateur conduit à une forte baisse de la puissance moyenne reçue.

3.8 Adaptation d'impédance par quadripôle LC

Imaginons par exemple que la résistance R de la charge ne soit que le quart de la résistance R_g de la charge. Les relations (88) et (90) montrent que la puissance reçue par la charge n'est que 64% environ de la puissance maximale. Pour remonter cette puissance reçue par la charge, il est possible d'intercaler entre la charge et le générateur un quadripôle « LC » conformément au schéma de la figure n° 9 ci-dessous. Supposons que l'ensemble {charge - quadripôle} ait une impédance d'entrée égale à R_g . Le générateur fournit alors la puissance moyenne maximale correspondant à la formule (90). Puisque, ni le condensateur ni l'inductance ne consomme de puissance en moyenne, la charge recevra cette puissance moyenne maximale.

Vis à vis du générateur, l'association se comporte comme un dipôle équivalent à l'association en parallèle du condensateur et de l'association série {L,R}. L'impédance équivalente est ainsi :

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{jC\omega} \cdot (R + jL\omega) \tag{98}$$

S'il y a adaptation d'impédance :

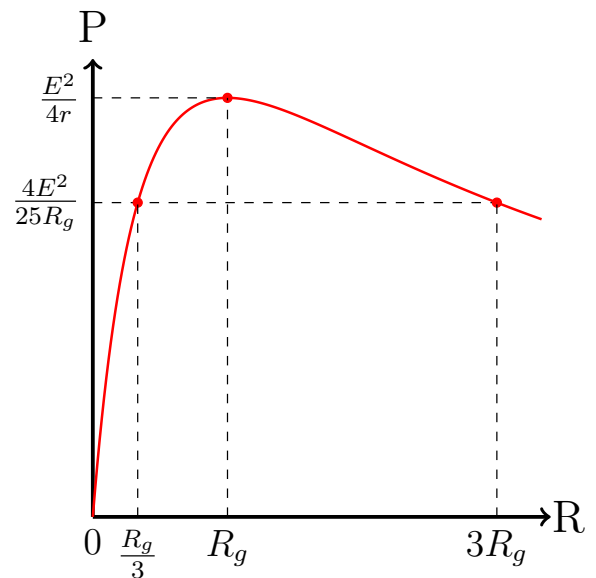


FIGURE 11 -

$$R_g = \frac{\frac{1}{jC\omega} \cdot (R + jL\omega)}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \quad (99)$$

soit :

$$R \cdot R_g + jR_g \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = \frac{L}{C} - j \cdot \frac{R}{C\omega}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient un système de deux équations qui permettent d'obtenir les valeurs de L et de C permettant l'adaptation d'impédance :

$$\begin{cases} R \cdot R_g = \frac{L}{C} & (a) \\ R_g \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = -\frac{R}{C\omega} & (b) \\ R_g \cdot (1 - LC\omega^2) = R & (c) \end{cases} \quad (100)$$

En remplaçant dans (c) L par son expression déduite de (a), on obtient :

$$R_g - R \cdot R_g^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2 = R \quad (101)$$

D'où l'expression de C :

$$C = \frac{\sqrt{\frac{R_g - R}{R}}}{R_g \cdot \omega} \quad (102)$$

En tenant compte de (a) :

$$L = \frac{\sqrt{R \cdot (R_g - R)}}{\omega} \quad (103)$$

Remarque 1 : Cette adaptation n'est rigoureuse que pour une fréquence donnée. De plus, en pratique, une faible puissance est absorbée par le quadripôle car une bobine n'est jamais de résistance nulle comme cela a été supposé ici.

Remarque 2 : les expressions (94) et (95) montrent bien que le montage n'est correct que pour $R_g > R$. Sinon, il faut inverser bornes d'entrée et bornes de sortie du quadripôle LC, ce qui revient à modifier le schéma conformément à la figure n°10. Dans ces conditions, l'ensemble {quadripôle - charge} est équivalent à une inductance en série avec l'association parallèle (R//C). L'impédance équivalente devient :

$$Z_e = jL\omega + \frac{R}{1 + jR \cdot C \cdot \omega} \quad (104)$$

S'il y a adaptation d'impédance :

$$R_g = jL\omega + \frac{R}{1 + jR \cdot C \cdot \omega} \quad (105)$$

soit :

$$R = jL\omega + \frac{R \cdot (1 - jR \cdot C \cdot \omega)}{1 + (R \cdot C \cdot \omega)^2} \quad (106)$$

En identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} R_g = \frac{R}{1 + (R \cdot C \cdot \omega)^2} & (d) \\ \frac{R^2 \cdot C \cdot \omega}{1 + (R \cdot C \cdot \omega)^2} = L \cdot \omega & (e) \end{cases} \quad (107)$$

Selon (d) :

$$1 + (R \cdot C \cdot \omega)^2 = \frac{R}{R_g} \quad (108)$$

soit :

$$R \cdot C \cdot \omega = \sqrt{\frac{R - R_g}{R_g}}$$

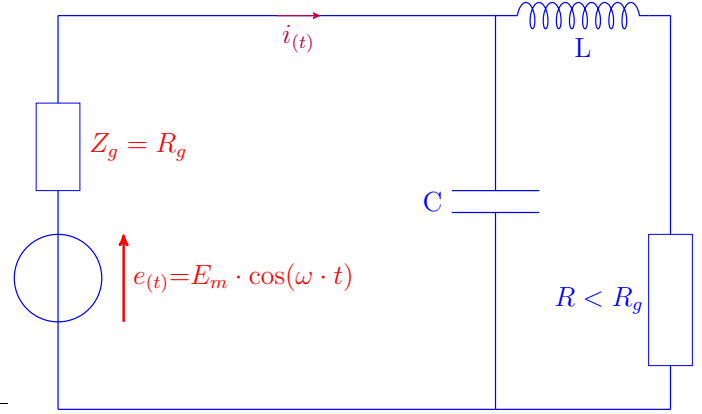


FIGURE 12 -

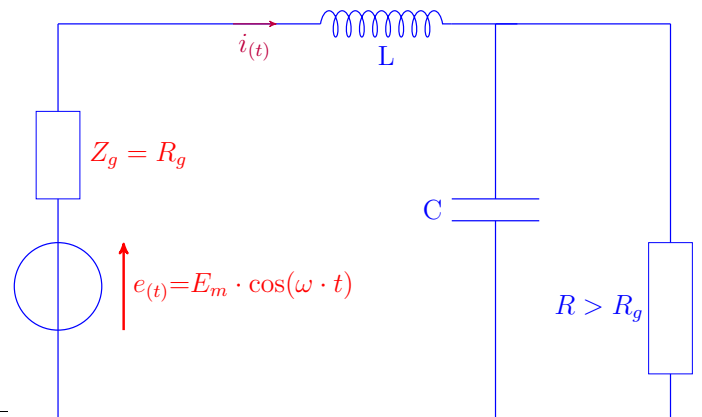


FIGURE 13 -

D'où l'expression de C permettant l'adaptation d'impédance :

$$C = \frac{\sqrt{\frac{R-R_g}{R_g}}}{R \cdot \omega} \quad (109)$$

En reportant dans (e), on obtient l'expression de L permettant l'adaptation d'impédance :

$$L = \frac{\sqrt{R_g \cdot (R - R_g)}}{\omega} \quad (110)$$

Les résultats (101) et (102) sont bien en accord avec la condition $R > R_g$.

[retour à la page principale](#)