

### Table des matières

Annexe 5 : les forces de marées.....	1
I. Origine des forces de marées.....	1
I.1. Calcul préliminaire du « jour lunaire moyen ».....	2
I.2. Cause des marées ? Pas si simple !.....	3
I.3. Cas d'un objet dans un champ uniforme.....	4
I.4. Cas d'un objet dans un champ non uniforme.....	4
II. Évaluation des forces de marée exercées par un astre sur un autre.....	5
II.1. Évaluation des forces de marées exercées par la lune sur la terre.....	5
II.2. Évaluation des forces de marées exercées par les autres astres.....	7
III. Théorie statique des marées.....	8
III.1. Force de marée créé par la lune sur la terre.....	8
III.2. Expression du vecteur champ de marée créé par la lune sur terre.....	9
III.3. Surface libre des océans en présence de la lune.....	11
III.4. Surface libre des océans en présence de la lune et du soleil.....	14
III.5. Influence des phases de la lune sur l'amplitude des marées.....	15
III.6. Influence de la longitude et de la latitude terrestre sur la hauteur d'eau.....	16
IV. Prévision actuelle des marées.....	17
IV.1. Mérites et insuffisances de la théorie statique.....	17
IV.2. Méthode actuelle de prévision des marées : méthode des harmoniques.....	19
V. Influence du phénomène des marées sur la distance terre – lune.....	20
V.1. Moment cinétique du système terre – lune.....	20
V.2. Influence des marées sur la distance terre – lune.....	21
V.3. Évaluation de l'actuelle vitesse d'augmentation de la distance terre – lune.....	22
V.4. Influence des marées sur l'énergie mécanique du système terre - lune.....	23
V.5. Influence des marées sur l'énergie du système terre – lune et évolution du système à long terme.....	23
V.6. Mouvements des centres de la terre et de la lune dans le référentiel barycentrique.....	25

### I. Origine des forces de marées.

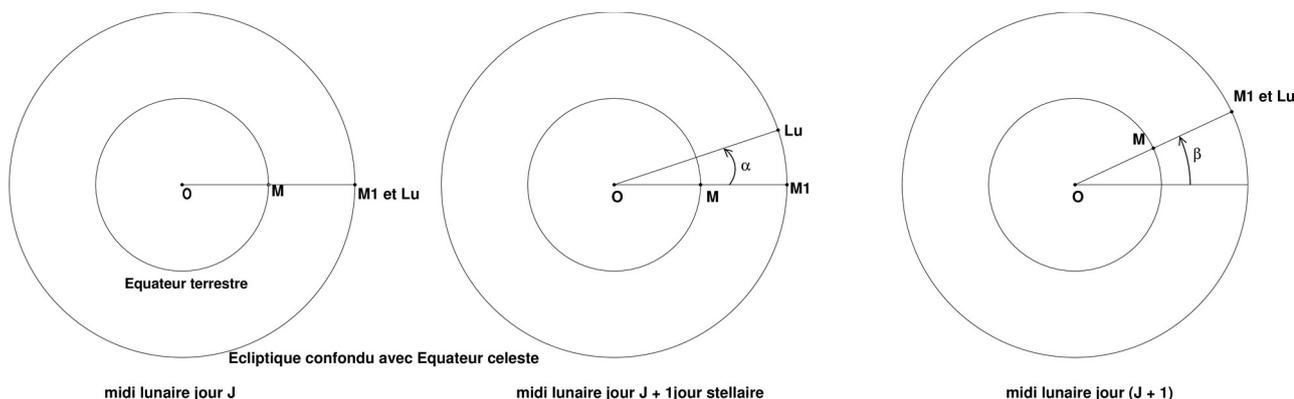
*Remarque préliminaire : nous utiliserons plusieurs fois l'expression « champ gravitationnel ». De quoi s'agit-il exactement ? De façon générale : un champ de force est une **région de l'espace** où une **source de champ** est capable d'exercer sur un objet **une force à distance**. Deux exemples : un aimant crée autour de lui un champ magnétique car, si on place un clou en fer dans cette région, l'aimant (la source du champ) exerce sur le clou une force attractive à distance, c'est à dire sans qu'il y ait contact entre le clou et l'aimant ; la lune et la terre, ainsi que les autres planètes, sont dans le champ de gravitation du soleil (ici la source de champ) car le soleil exerce sur ces astres des forces attractives dites forces gravitationnelles.*

## 1.1. Calcul préliminaire du « jour lunaire moyen ».

Chacun sait que la fréquence des marées est imposée par le mouvement de la lune, le soleil ayant essentiellement une influence sur l'amplitude des marées.

Par analogie avec le jour solaire, on peut définir le jour lunaire sur un méridien donné de la surface terrestre comme la durée notée  $J_L$  entre deux culminations successives de la lune en un point de ce méridien. Cette durée, comme celle du jour solaire, varie en fonction des saisons : la lune ne tourne pas toujours à la même vitesse autour de la terre (loi des aires) et il faut tenir compte de l'obliquité de l'axe des pôles terrestres et de l'inclinaison de la trajectoire du centre de la lune par rapport à l'écliptique. Le calcul est analogue à celui de l'équation du temps développé en annexe 3 mais en plus complexe : le mouvement du centre de la lune est plus complexe que celui du centre du soleil.

Nous allons donc nous limiter à celui de la durée moyenne  $J_{Lm}$  du jour lunaire. Notons  $M$



l'intersection du méridien du lieu avec le plan de l'écliptique et  $M_1$  l'intersection de la sphère céleste avec la droite (OM), O étant le centre de la terre. Soit Lu, le point de l'écliptique dont la longitude écliptique est à chaque instant égale à la longitude écliptique du centre de la lune. Nous étudions les mouvement dans le repère géocentrique. À midi lunaire un jour J quelconque, les point  $M_1$  et Lu sont confondus. Un jour stellaire plus tard,  $M_1$  retrouve la même position mais il n'est pas pour autant midi lunaire : le point Lu a tourné d'un angle  $\alpha$ . Pour rattraper le point Lu, le point  $M_1$  doit tourner d'un angle supplémentaire  $\beta$ . **Le jour lunaire est donc un peu plus long que le jour stellaire.**

Le calcul est classique et a été fait à plusieurs reprises : en un jour lunaire moyen de durée  $J_{LM}$ , M tourne de un tour par rapport à Lu. Sa vitesse de rotation par rapport à Lu, exprimée en tour par heure est donc :

$$\Omega_{M_1/Lu} = \frac{1}{J_{Lm}} \text{ avec } J_{Lm} \text{ en heures.}$$

La vitesse de rotation de  $M_1$  par rapport au repère géocentrique est de un tour par jour stellaire :

$$\Omega_{M_1} = \frac{1}{J_{St}} \text{ avec } J_{St} = 23,934472 \text{ heures.}$$

La vitesse de rotation de Lu par rapport au repère géocentrique est de un tour par mois sidéral  $M_{si} = 27,3217$  jours = 655,7198782 heures, soit :

$$\Omega_{Lu} = \frac{1}{M_{si}} \text{ avec } M_{si} \text{ exprimé en heures.}$$

$$\Omega_{M_1/Lu} = \Omega_{M_1} - \Omega_{Lu} .$$

Soit, par identification :

$$\frac{1}{J_{Lm}} = \frac{1}{J_{St}} - \frac{1}{M_{si}} ; \text{D'où : } J_{Lm} = \frac{M_{si} \cdot J_{st}}{M_{si} - J_{st}} .$$

Application numérique :

$$J_{Lm} = \frac{655,7198782 \cdot 23,934472}{655,7198782 - 23,934472} = 24,84120226 \text{ heures} .$$

**La durée moyenne du jour lunaire est donc :**

**24 heures 50 minutes et 28 secondes.**

## 1.2. Cause des marées ? Pas si simple !

On lit souvent dans les ouvrages de vulgarisation ou sur certains sites internet : « les marées sont le résultat des forces d'attraction exercées sur les océans par la lune et par le soleil ». Il est exact que les forces de gravitation exercées par la lune et le soleil interviennent mais l'explication est très incomplète et en contradiction avec certains faits observés.

Commençons par un simple raisonnement sur les ordres de grandeurs. Nous avons expliqué, paragraphe V. I, que l'attraction gravitationnelle exercée par un astre sur un objet quelconque (une goutte d'eau d'un océan, dans ce contexte) est proportionnelle à la masse de l'astre attracteur et inversement proportionnelle au carré de la distance entre cet objet et le centre de l'astre attracteur. Nous avons alors montré que l'attraction du soleil sur un objet terrestre est 178 fois plus importante que l'attraction de la lune sur le même objet. **Dans de telles conditions, l'influence de la lune sur les marées devrait être totalement négligeable devant celle du soleil ; or, en réalité, l'influence de la lune est prépondérante ! Première incohérence !**

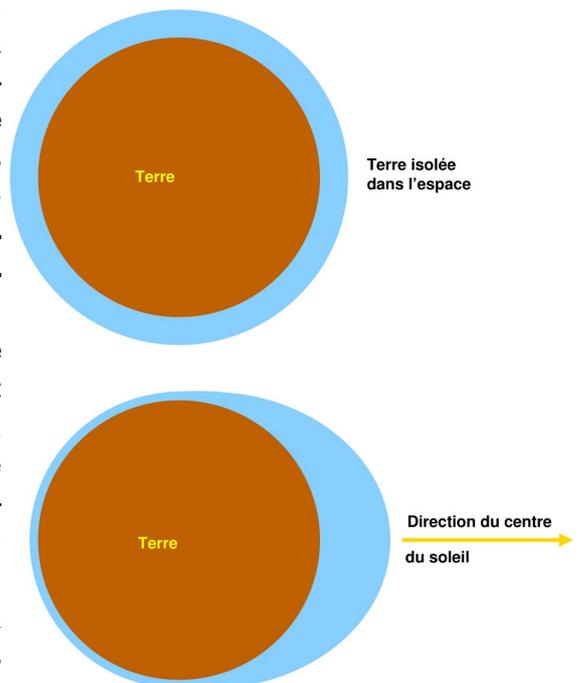
La seconde incohérence concerne le rythme des marées. Restons dans l'hypothèse précédente : l'eau des océans, attirée par le soleil, se déplace du côté du soleil : par rapport à la hauteur moyenne que l'on obtiendrait en absence de marée, on obtient une marée haute au plus près du soleil et une marée basse à l'opposé.

Comme la terre tourne par rapport au soleil d'un tour par jour solaire, on obtient une marée haute et une marée basse par jour solaire. De plus, les heures des marées hautes et basses sont pratiquement fixes : marée haute peu après midi solaire, marée basse peu après minuit. Ce n'est pas du tout ce que l'on obtient : la durée moyenne entre deux marées haute et la durée moyenne entre deux marées basse sont exactement égales à un demi jour lunaire et les amplitudes des marées dépendent fortement du cycle de la lune ! **Seconde incohérence !** Il nous faut donc une théorie des marées plus élaborée.

Pour comprendre, commençons par réfléchir à quelques expériences simples.

## 1.3. Cas d'un objet dans un champ uniforme.

Une petite bille métallique de masse  $m$  abandonnée dans l'air au voisinage de la



terre est soumise essentiellement à quatre forces :

- \* La force de gravitation exercée par la terre ;

- \* La force d'inertie centrifuge due à la rotation propre de la terre autour de l'axe de ses pôles ;

- \* Les forces exercées par l'air : poussée d'Archimède et force de frottement.

Si la bille est assez dense et si sa vitesse reste faible, les forces exercées par l'air sont négligeables devant les deux autres. La somme des deux premières forces est appelé « poids » ou « force de pesanteur ». Elle peut s'exprimer par la relation vectorielle :

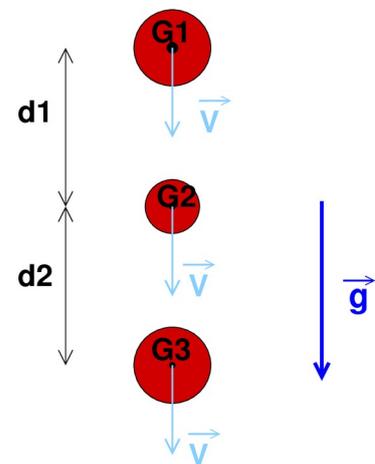
$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

où  $\vec{g}$  est appelé vecteur champ de pesanteur.

Dans un espace de dimensions faibles devant le rayon terrestre, on peut considérer que **le vecteur  $\vec{g}$  est**

**le même en tout point : le champ de pesanteur est alors qualifié d'uniforme.**

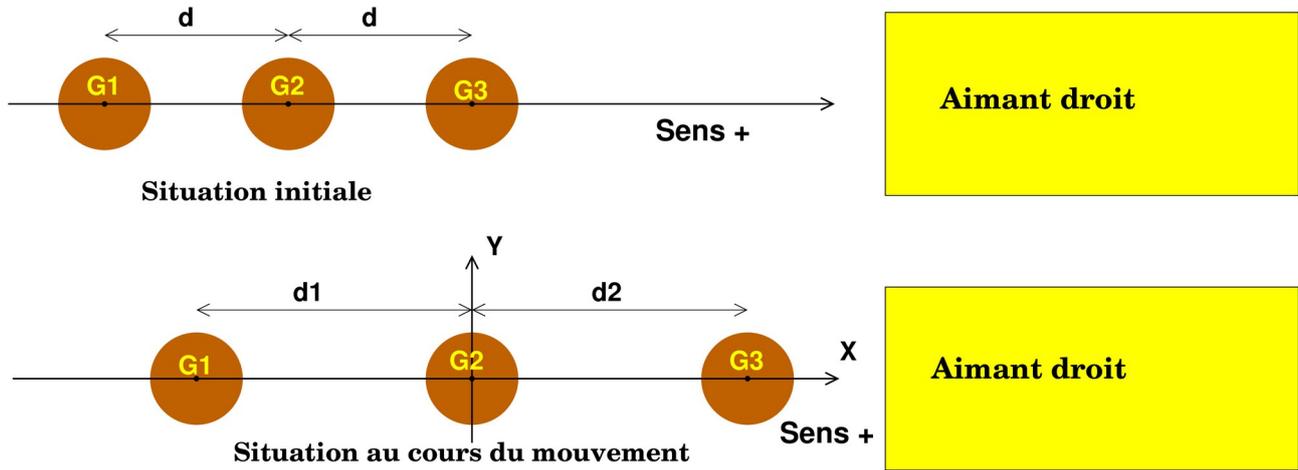
Imaginons l'expérience suivante : on lâche simultanément trois billes éventuellement différentes sans leur communiquer de vitesse. Le champ de pesanteur étant uniforme, les trois billes ont la même accélération vers le bas et ont à chaque instant la même vitesse ; les distances  $d_1$  et  $d_2$  entre leurs centres ne varient pas au cours du temps. On peut imaginer de relier ces trois billes par deux élastiques, créant ainsi un objet déformable. Les élastiques ne vont pas varier de longueur au cours de la chute. On peut aussi imaginer d'enfermer du sable dans un ballon en caoutchouc souple : il ne se déformera pas lors d'une chute ! **Conclusion : un objet déformable ne se déforme pas dans un champ de force uniforme.**



**Sol terrestre**

#### ***1.4. Cas d'un objet dans un champ non uniforme.***

L'exemple le plus simple de champ non uniforme est le champ magnétique créé par une barre métallique aimantée (un « aimant droit »). Imaginons trois petites billes en fer identiques, alignées sur une table à quelques centimètres les unes des autres. Les billes étant maintenues immobiles sur la table avec une main, on pose sur la table avec l'autre main un aimant droit puis on enlève la main bloquant les trois billes, celles-ci se mettent alors en mouvement simultanément. La bille la plus proche de l'aimant est davantage accélérée que la bille centrale, elle-même plus accélérée que la bille la plus éloignée de l'aimant : l'écart entre les billes augmente au cours du temps (avant bien sûr que les billes ne viennent en contact avec l'aimant !). On obtient :  $d_1 > d$  et  $d_2 > d$ . **Première conclusion : le système déformable constitué des trois billes se déforme dans un champ de force non uniforme.**



Imaginons maintenant l'expérience du point de vue d'un observateur fictif qui serait sur la bille centrale ; plus précisément, décrivons le mouvement dans le repère  $(G_2XY)$ : son origine est le centre  $G_2$  de la bille centrale et ses axes gardent des directions fixes par rapport à l'aimant. Dans ce repère, le système constitué des trois billes se déforme de la même façon mais si  $G_3$  se déplace vers l'aimant,  $G_1$  se déplace dans le sens opposé !

De façon très générale, **on appelle effets de marées les déformations d'un système provoquées par un champ de force non uniforme. La déformation du système formé des trois billes n'est pas due aux trois forces exercées par l'aimant sur les trois billes** (la relation fondamentale de la dynamique appliquée au système montre que ces trois forces sont responsables du mouvement du centre  $G_2$  du système) **mais aux différences existant entre ces trois forces.**

## II. Évaluation des forces de marée exercées par un astre sur un autre.

### II.1. Évaluation des forces de marées exercées par la lune sur la terre.

Rappelons d'abord la loi de Newton exprimant la force de gravitation exercée par un astre à symétrie sphérique de centre  $O$  et de masse  $M$  sur une particule  $P$  de masse  $m$  :

$$\vec{F} = -\frac{K \cdot m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u} \text{ où } \vec{u} \text{ désigne un vecteur}$$

unitaire colinéaire à  $\overrightarrow{OP}$ , et de même sens, où

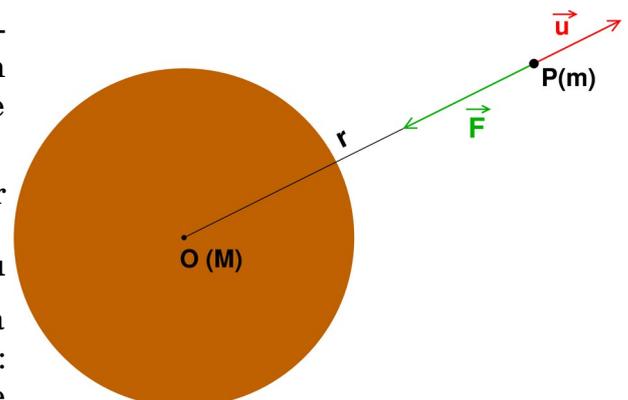
$r$  désigne la distance de  $O$  à  $P$  et  $K$  désigne la constante universelle de gravitation :

$6,67384 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ . Par analogie avec le

vecteur poids écrit comme le produit de la masse par un vecteur champs, on pose :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{G}(P)$$

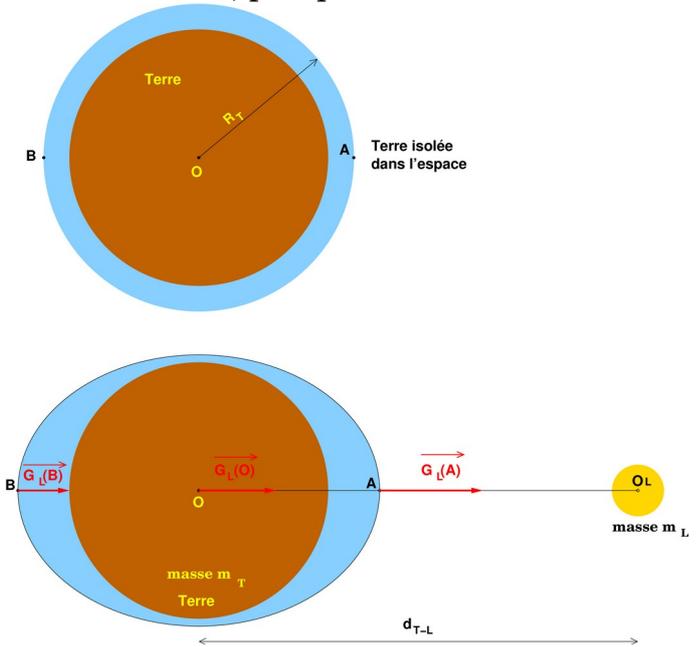
où  $\vec{G}(P)$  désigne le vecteur champ de gravitation créé par l'astre au point  $P$ . Ainsi :



$$\vec{G}(P) = -\frac{K \cdot M}{r^2} \cdot \vec{u}.$$

Un tel champ n'est pas uniforme puisqu'il diminue d'intensité en fonction de la distance : par exemple : multiplier la distance  $r$  par deux revient à diminuer l'intensité du champs, donc la force exercée sur une particule de masse  $m$ , par quatre.

Considérons maintenant le cas particulier de la terre et de la lune. Les notations déjà utilisées sont rappelées sur le schéma. Le champ de gravitation est plus intense en A qu'en O et plus intense en O qu'en B. Par analogie avec ce que nous avons expliqué à propos des trois billes dans le champ magnétique, nous pouvons prévoir une déformation de la surface des océans : la surface libre de ceux-ci tend à s'allonger le long de l'axe ( $OO_L$ ), ce qui conduit à une marée haute au plus près de la lune mais aussi à une marée haute à l'opposé. Compte-tenu de la rotation de la terre par rapport à la lune d'un tour par jour lunaire, **la durée moyenne entre deux marées hautes consécutives est d'un demi-jour lunaire soit 12h 25min 14s, ce qui est bien conforme à la réalité !**



*Remarque : comme souvent, la figure n'est pas à l'échelle, la distance terre - lune est très largement sous-estimée et la déformation de la surface de l'eau par effet de marée est très exagérée : en réalité les marées provoquent des variations de hauteur d'eau de quelques mètres seulement ; ces variations sont totalement négligeables devant  $R_T = 6378\text{km}$  !*

Pour évaluer l'influence des effets de marées sur un astre, on évalue la différence d'intensité entre le champ gravitationnel au centre de l'astre et le champ gravitationnel à la périphérie, le long de l'axe des centres. Ainsi la différences entre les champs créés par la lune en A et en O s'écrit :

$$G_L(A) - G_L(O) = K \cdot m_L \cdot \left( \frac{1}{AO_L^2} - \frac{1}{OO_L^2} \right) = K \cdot m_L \cdot \left( \frac{1}{(d_{T-L} - R_T)^2} - \frac{1}{d_{T-L}^2} \right) = \frac{K \cdot m_L}{d_{T-L}^2} \cdot \left( \frac{1}{\left(1 - \frac{R_T}{d_{T-L}}\right)^2} - 1 \right).$$

Pour simplifier cette expression, on remarque que  $\frac{R_T}{d_{T-L}}$  est très inférieur à 1 (en réalité 0,016 en moyenne) ; dans ces conditions, le carré de ce nombre devient négligeable devant 1 ( valeur : 0,00027). On peut ainsi poser :

$$\left(1 - \frac{R_T}{d_{T-L}}\right)^2 = 1 - \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}} + \left(\frac{R_T}{d_{T-L}}\right)^2 \approx 1 - \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{R_T}{d_{T-L}}\right)^2} \approx \frac{1}{\left(1 - \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}}\right)} \approx 1 + \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}}.$$

Remarque : en fait nous avons effectué un développement de Taylor en  $\frac{R_T}{d_{T-L}}$  limité à l'ordre 2 ; plus simplement, on peut remarquer que :  $\frac{1}{1-0,032}$  est très proche de (1+ 0,032).

D'où l'expression simplifiée de la différence entre les deux champs :

$$G_L(A) - G_L(O) = \frac{2 \cdot K \cdot m_L \cdot R_T}{d_{T-L}^3} .$$

Nous pouvons de même calculer la différence entre les champs créés par la lune en O et en B :

$$G_L(O) - G_L(B) = K \cdot m_L \cdot \left( \frac{1}{OO_L^2} - \frac{1}{O_L B^2} \right) = K \cdot m_L \cdot \left( \frac{1}{d_{T-L}^2} - \frac{1}{(d_{T-L} + R_T)^2} \right) = \frac{K \cdot m_L}{d_{T-L}^2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{R_T}{d_{T-L}} \right)^2} \right) .$$

Les mêmes simplifications qu'au-dessus conduisent à :

$$\frac{1}{\left( 1 + \frac{R_T}{d_{T-L}} \right)^2} \approx \frac{1}{\left( 1 + \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}} \right)} \approx 1 - \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}} .$$

D'où l'expression simplifiée de la différence entre les deux champs :

$$G_L(O) - G_L(B) = \frac{2 \cdot K \cdot m_L \cdot R_T}{d_{T-L}^3} .$$

Nous obtenons le même écart qu'entre les champs en A et en O.

## II.2. Évaluation des forces de marées exercées par les autres astres.

La formule précédente peut se généraliser : les forces de marées sont proportionnelles à la masse de l'astre **produisant** l'effet de marée, au rayon de l'astre **subissant** l'effet de marée et inversement proportionnelles au cube de la distance entre les centres des deux astres. Ainsi les forces de marées exercées sur terre par le soleil sont proportionnelles à  $\frac{m_S \cdot R_T}{d_{T-S}^3}$ , celles exercées par la terre sur la lune sont proportionnelles à  $\frac{m_T \cdot R_L}{d_{T-L}^3}$ . Ces remarques permettent de dresser un tableau comparatif de ces différentes forces en attribuant arbitrairement la valeur 1 aux effets de marées créés par la lune sur terre.

Forces de marées	créées par la lune sur la terre	créées par le soleil sur la terre	créées par la terre sur la lune	créées par le soleil sur la lune
	1	0,456 = 1/2,19	22,1	0,124 = 1/8,04

Ces résultats sont cohérents avec les faits : l'influence de la lune sur les marées terrestre est prédominante (c'est la lune qui impose le rythme des marées) mais l'influence du soleil n'est pas négligeable : il influence fortement les amplitudes des marées. Si les axes (OO<sub>L</sub>) et (OO<sub>S</sub>) sont proches (cas des nouvelles et des pleines lunes), les effets du soleil et de la lune s'ajoutent, les marées sont de grande amplitude (marées de vives eaux tous les demi-mois lunaires en moyenne) ; lorsque les deux axes sont le plus écartés (cas des deux quartiers), les effets se compensent partiellement, les marées sont de faible

amplitude (marées de mortes eaux). Les amplitudes des marées dépendent de nombreux autres facteurs : les saisons, les variations des distances  $d_{T-S}$  et  $d_{T-L}$  ...

*Remarque : tout cela est fort bien expliqué dans l'excellent livre de Odile GUÉRIN : « COMPRENDRE LES MARÉES », publié aux éditions OUEST FRANCE.*

### III. Théorie statique des marées.

La compréhension de cette partie demande quelques connaissances en physique et en mathématiques...

#### III.1. Force de marée créée par la lune sur la terre.

Pour l'instant, nous négligeons l'influence du soleil : nous supposons l'ensemble {terre – lune} suffisamment loin de tout autre astre pour constituer un système isolé. Le principe d'inertie permet ainsi d'affirmer que le centre d'inertie G n'a pas d'accélération par rapport à un référentiel galiléen lié à un système d'étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixes. **Un repère  $R_G$  d'origine G dont les axes pointent vers trois étoiles très éloignées est donc galiléen.** On peut donc appliquer dans ce repère la relation fondamentale de la dynamique (dite aussi : seconde loi de Newton), sachant que la seule force à prendre en compte est la force gravitationnelle exercée par la lune sur la terre :

$$m_T \cdot \vec{a}_{O/R_G} = m_T \cdot \vec{G}_L(O) ; \text{ soit : } \vec{a}_{O/R_G} = \vec{G}_L(O) .$$

L'accélération du centre de la terre dans ce repère barycentrique  $R_G$  est donc égale à chaque instant au vecteur champ de gravitation créé par la lune au centre de la terre.

On s'intéresse maintenant aux forces exercées sur une particule P de masse m à la périphérie de la terre (par exemple une goutte d'eau d'un océan), **l'étude se faisant maintenant dans le repère géocentrique R**, d'origine O, le centre de la terre, ces trois axes restant constamment parallèles à ceux de  $R_G$ .

Considérons d'abord les forces qui existent en absence de la lune :

- \* La force de gravitation exercée par la terre ;
- \* La force d'inertie centrifuge due à la rotation propre de la terre au tour de l'axe de ses pôles ;
- \* Les forces exercées par l'eau et éventuellement l'air autour de la goutte d'eau étudiée.

En absence de la lune, la goutte d'eau est considérée en équilibre par rapport à la terre : la résultante de ces forces est donc nulle.

À ces forces s'ajoutent celles inhérentes à la présence de la lune :

- \* l'attraction gravitationnelle exercée par la lune sur la particule :  $m \cdot \vec{G}_L(P)$  ;
- \* la force d'inertie due au fait que le repère géocentrique n'est plus galiléen : du fait de la présence de la lune, son origine possède une accélération non nulle. Ce repère étant en translation par rapport à  $R_G$ , la force d'inertie de Coriolis est nulle ; reste la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{F}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_{O/R_G} = -m \cdot \vec{G}_L(O)$ .

Conclusion : la résultante des deux forces dues à la présence de la lune est la force de marée s'exerçant sur la particule P en présence de la lune ; elle vaut :

$$\vec{F}_m = m \cdot \vec{G}_L(P) + \vec{F}_{ie} = m \cdot [\vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(O)] .$$

Par analogie avec les vecteurs champs de gravitation et de pesanteur, nous pouvons

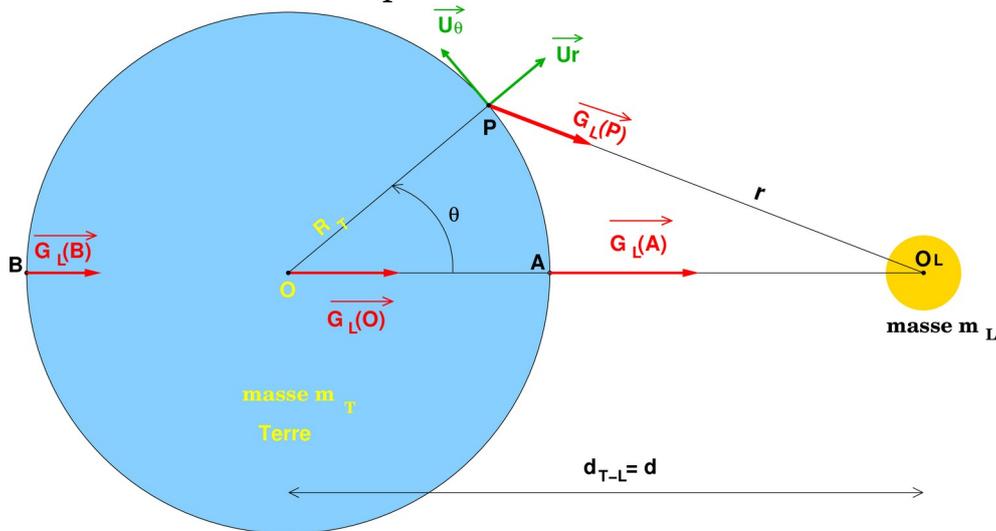
définir un vecteur champ de marée  $\vec{a}_m$  tel que :  $\vec{F}_m = m \cdot \vec{a}_m$  . Ainsi par identification :

$$\vec{a}_m = [\vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(O)] .$$

La théorie confirme les observations faites paragraphe I.4 sur les déformations provoquées par les champs non uniformes. **La force de marée créé par la lune en un point P quelconque de la terre a bien pour origine la différence entre le champ de gravitation créé par la lune au point P de la terre et le champ de gravitation créé par la lune au centre de la terre.**

### III.2. Expression du vecteur champ de marée créé par la lune sur terre.

Nous utilisons les notations précisées sur le schéma.



$$\vec{a}_m = K \cdot m_L \cdot \left( \frac{\vec{PO}_L}{r^3} - \frac{\vec{OO}_L}{d^3} \right) .$$

$$\vec{OO}_L = d \cdot [\cos(\theta) \cdot \vec{u}_r - \sin(\theta) \cdot \vec{u}_\theta] ;$$

$$\vec{PO}_L = \vec{PO} + \vec{OO}_L = [d \cdot \cos(\theta) - R_T] \cdot \vec{u}_r - d \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{u}_\theta ;$$

Théorème de Pythagore généralisé ( Al-Kashi ) :  $r^2 = d^2 + R_T^2 - 2 \cdot R_T \cdot d \cdot \cos(\theta)$  ;

D'où :

$$r = d \cdot \left[ 1 - \frac{2 \cdot R_T}{d} \cdot \cos(\theta) + \frac{R_T^2}{d^2} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Un développement de Taylor limité à l'ordre 2 en  $\frac{R_T}{d}$  conduit à l'expression approchée :

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{d^3} \cdot \left[ 1 + \frac{3 \cdot R_T}{d} \cdot \cos(\theta) \right] .$$

La composante radiale du vecteur champ de marée en P est ainsi :

$$a_{mr} = \frac{K \cdot m_L}{d^3} \cdot \left[ (d \cdot \cos(\theta) - R_T) \cdot \left( 1 + \frac{3 \cdot R_T}{d} \cdot \cos(\theta) \right) - d \cdot \cos(\theta) \right] ;$$

Soit encore :

$$a_{mr} = \frac{K \cdot m_L}{d^3} \left[ 3 \cdot R_T \cdot \cos^2(\theta) - R_T - \frac{3 \cdot R_T^2}{d} \cdot \cos(\theta) \right].$$

$\frac{3 \cdot R_T^2}{d} = R_T \cdot \left( \frac{3 \cdot R_T}{d} \right)$  ; or  $\frac{3 \cdot R_T}{d}$  est très inférieur à 1 ;  $\frac{3 \cdot R_T^2}{d}$  est donc très inférieur à  $R_T$  et

peu ainsi être négligé dans l'expression de  $a_{mr}$ .

D'où finalement :

$$a_{mr} = \frac{K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot [3 \cdot \cos^2(\theta) - 1].$$

La composante tangentielle du vecteur champ de marée en P créé par la lune s'écrit :

$$a_{m\theta} = \frac{K \cdot m_L}{d^3} \left[ -d \cdot \sin(\theta) \cdot \left( 1 + \frac{3 \cdot R_T}{d} \cdot \cos(\theta) \right) + d \cdot \sin(\theta) \right] = -\frac{3 \cdot K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) ;$$

soit encore :

$$a_{m\theta} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot \sin(2 \cdot \theta) .$$

*Remarque 1 : le cas particuliers  $\theta = 0^\circ$  correspondant au zénith (point A de la figure) conduit à :*

$$\vec{a}_m = \frac{2 \cdot K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot \vec{u}_r ;$$

*le cas particulier  $\theta = 180^\circ$  correspondant au nadir (point B de la figure) conduit à :*

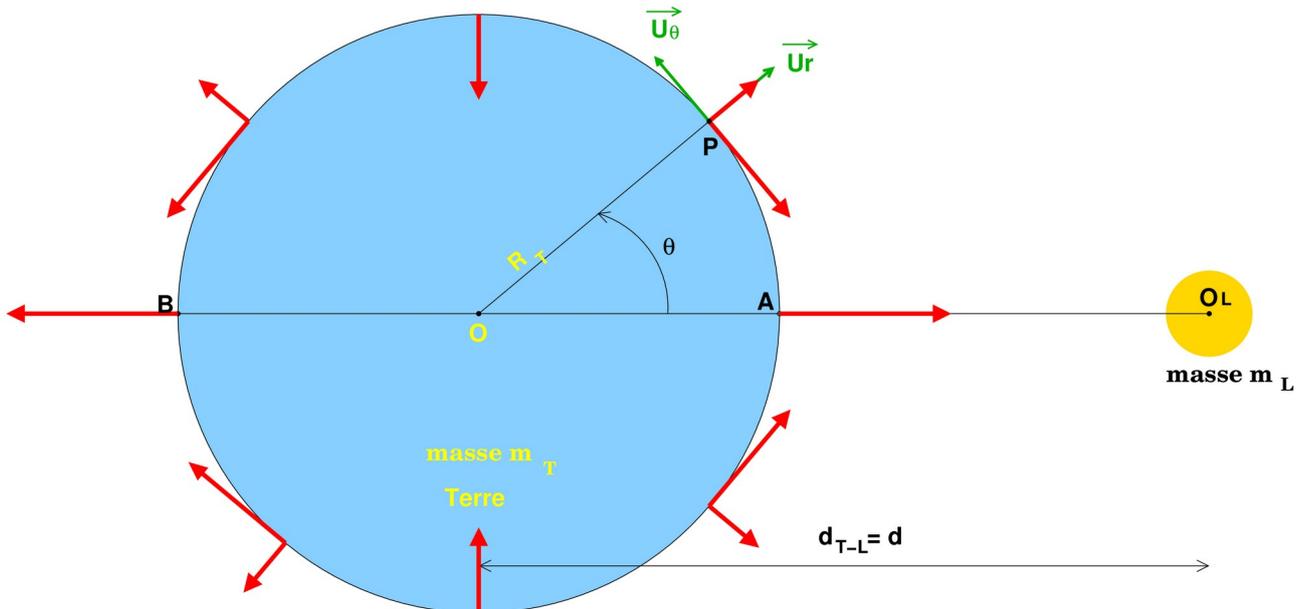
$$\vec{a}_m = \frac{2 \cdot K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot \vec{u}_r .$$

Compte tenu de l'orientation du vecteur unitaire  $\vec{u}_r$ , ces résultats sont cohérents avec ceux du paragraphe II.1.

*Remarque 2 : pour  $\theta$  compris entre  $0^\circ$  et  $+90^\circ$  et entre  $180^\circ$  et  $270^\circ$ , la composante  $a_{m\theta}$  est négative ; pour  $\theta$  compris entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$  et entre  $270^\circ$  et  $360^\circ$ , la composante  $a_{m\theta}$  est positive. Compte tenu de l'orientation du vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$ , les orientations de la composante tangentielle du vecteur  $\vec{a}_m$*

*sont rappelées sur le schéma ci-dessous. On remarque que, dans l'hémisphère terrestre face à la lune, cette composante tend à déplacer l'eau vers le point A au plus près de la lune alors que dans l'hémisphère terrestre opposé, la composante tangentielle de la force de marée tend à déplacer l'eau vers le point B le plus éloigné de la lune. Les forces de marée tendent donc à faire monter le niveau d'eau au voisinage de l'axe terre - lune, dans l'hémisphère face à la lune aussi bien que dans l'hémisphère opposé, ce qui est conforme aux raisonnements du paragraphe II.1.*

*Remarque 3 : les forces de marées sont bien proportionnelles à la masse de l'astre créant le phénomène de marée, inversement proportionnelle au cube de la distance entre les centres des deux astres et proportionnelle au rayon de l'astre subissant le phénomène de marée.*



La figure ci-dessus représente en rouge les composantes normale et tangentielle du vecteur champ de marée pour quelques positions du point P de la surface terrestre.

### III.3. Surface libre des océans en présence de la lune.

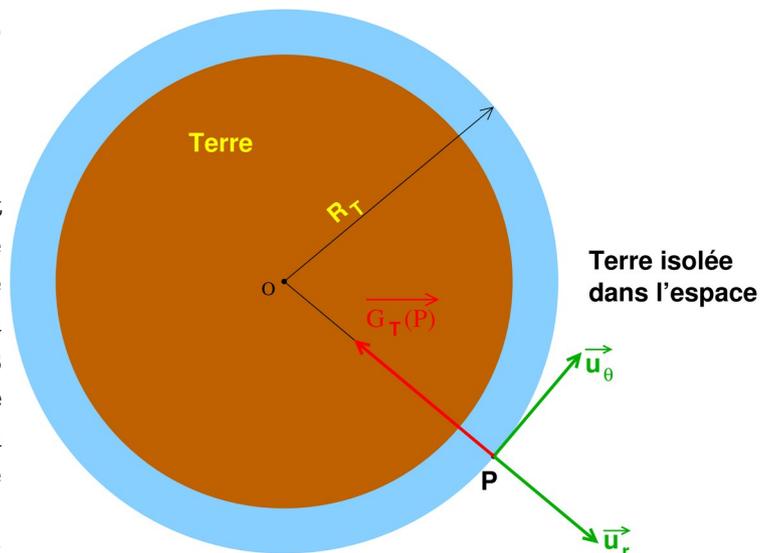
Ce calcul repose sur des hypothèses très simplificatrices :

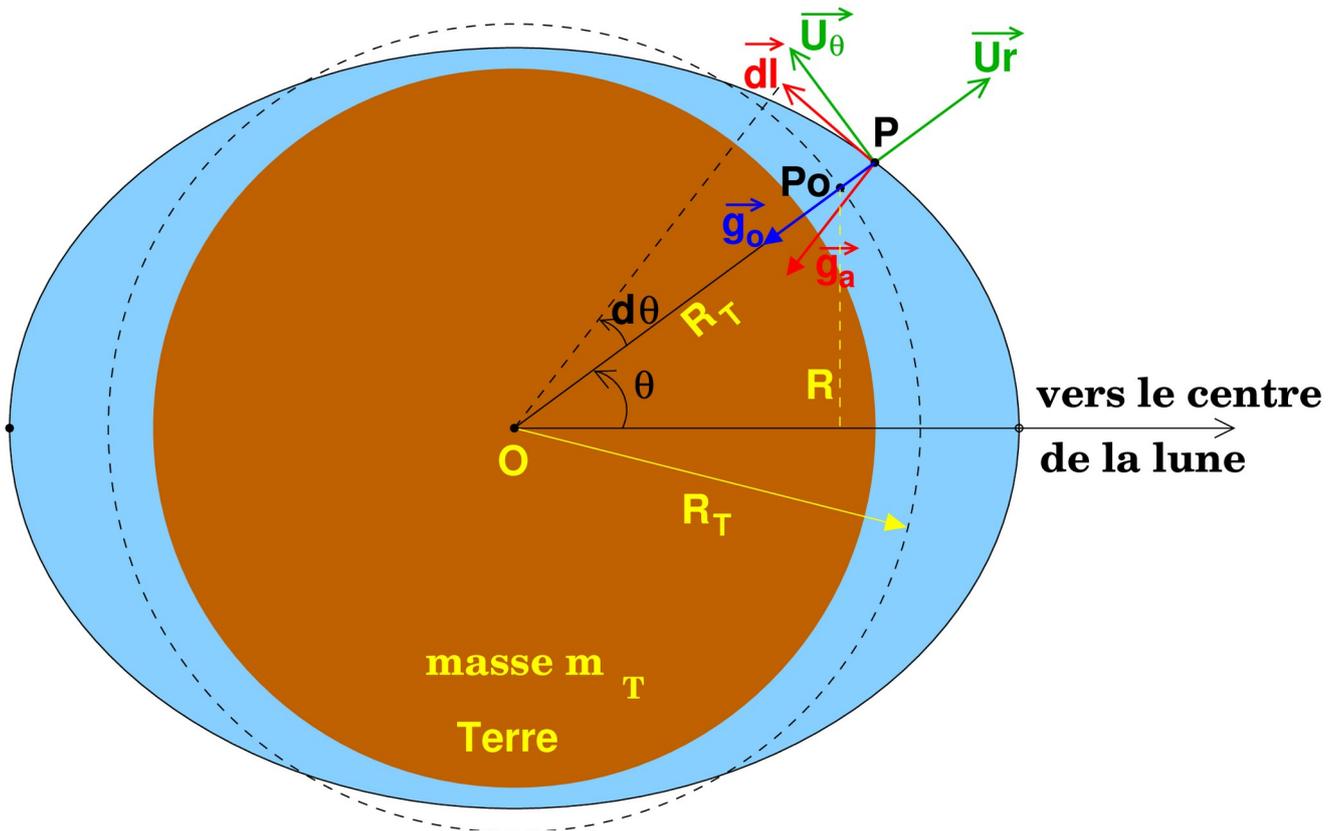
- \* la terre est supposée parfaitement sphérique et recouverte d'une couche d'eau dont la hauteur serait constante en absence de marée (on néglige la surface des continents alors que les mers et océans occupent en réalité 71 % de la surface terrestre et on suppose tous les océans et mers de même profondeur...);
- \* la pression exercée sur les mers et océans par l'air atmosphérique est partout la même (pas d'anticyclone ou de dépression...)

\* on néglige la force d'inertie centrifuge due à la rotation propre de la terre autour de l'axe de ses pôles devant la force de gravitation exercée par la terre. Cela permet de confondre le champ de pesanteur de vecteur  $\vec{g}$  avec le vecteur champ de gravitation créé par la terre en un point P à la surface libre des océans. Ainsi, en absence de force de marée, en tout point P de la surface libre de l'eau, on obtient :

$$\vec{g} = \vec{G}_T(P) = -\frac{K \cdot m_T}{R_T^2} \cdot \vec{u}_r.$$

En présence de la lune, l'eau est soumise en plus à la force de marée qui a deux composantes : une composante tangentielle responsable des mouvements d'eau et une composante radiale dont les effets s'ajoute à ceux du champs de pesanteur : tout se passe comme si la surface libre de l'eau était soumise à une champ de pesanteur apparent égal à la somme du champ de pesanteur sans la lune et du champ de marée :





$$\vec{g}_a = \vec{g} + \vec{a}_m = -\frac{K \cdot m_T}{R_T^2} \cdot \vec{u}_r + \frac{K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot [3 \cdot \cos^2(\theta) - 1] \cdot \vec{u}_r - \frac{3}{2} \cdot \frac{K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \cdot \vec{u}_\theta$$

La valeur du champ radial de marée est au plus égale à :

$$\frac{2 \cdot K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \approx 10^{-6} \text{ N/kg} ,$$

soit une valeur de l'ordre du dix millionième de g. Nous pouvons négliger cette composante et retenir l'expression simplifiée du champ de pesanteur apparent :

$$\vec{g}_a = -\frac{K \cdot m_T}{R_T^2} \cdot \vec{u}_r - \frac{3}{2} \cdot \frac{K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \cdot \vec{u}_\theta .$$

On note  $\vec{P}_o \vec{P} = h \cdot \vec{u}_r$  . h représente l'élévation ( si h > 0 ) ou la diminution ( si h < 0 ) du niveau de la surface libre par rapport au niveau moyen en absence de marée avec  $OP_o = R_T$  .

Nous supposons l'eau en équilibre dans ce champ de pesanteur apparent ; la surface libre de l'eau est donc l'horizontale apparente du lieu, soit la perpendiculaire au vecteur  $\vec{g}_a$

(un fil à plomb en équilibre indiquerait la direction du vecteur  $\vec{g}_a$  ). Soit un déplacement

élémentaire du point P à la surface libre de l'eau dans le plan de figure :

$\vec{dl} = dh \cdot \vec{u}_r + (R_T + h) \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta \approx dh \cdot \vec{u}_r + R_T \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta$  ( |h| négligeable devant  $R_T$  ). le vecteur  $\vec{dl}$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{g}_a$  ; le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul :

$$\frac{-K \cdot m_T}{R_T^2} \cdot dh - \frac{3}{2} \cdot \frac{K \cdot m_L \cdot R_T}{d^3} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \cdot R_T \cdot d\theta = 0 ;$$

soit :

$$\frac{dh}{d\theta} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{m_L \cdot R_T^4}{m_T \cdot d^3} \cdot \sin(2 \cdot \theta) .$$

Remarque : la relation fondamentale de la statique des fluides permet de démontrer l'orthogonalité des

vecteurs  $d\vec{l}$  et  $\vec{g}_a$ . Si  $Pr$  désigne la pression et  $\rho$  la masse volumique de l'eau, en tout point du liquide en équilibre, la pression vérifie :  $\overrightarrow{\text{grad}}(Pr) = \rho \cdot \vec{g}_a$ . Imaginons un déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  à la surface de l'eau, tangentielllement à sa surface libre :  $\overrightarrow{\text{grad}}(Pr) \cdot d\vec{l} = \rho \cdot \vec{g}_a \cdot d\vec{l}$ . Or,  $\overrightarrow{\text{grad}}(Pr) \cdot d\vec{l}$  représente la variation élémentaire de pression à la surface libre du liquide qui est nulle puisque la pression atmosphérique est par hypothèse la même partout au niveau de l'eau. On obtient bien :  $\vec{g}_a \cdot d\vec{l} = 0$ .

Par intégration, on obtient :

$$h = \frac{3}{4} \cdot \frac{m_L \cdot R_T^4}{m_T \cdot d^3} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + C$$

où  $C$  est une constante que nous allons déterminer en supposant que l'eau est incompressible, c'est à dire de volume constant. À chaque instant, les augmentations de niveau d'eau dans les régions de marées hautes sont compensées par les diminutions dues aux marées basses dans d'autres régions du globe : la variation de volume d'eau créée par la dénivellation  $h$  est nulle à l'échelle de la terre à chaque instant. Attention : sur la figure, la hauteur d'eau due au phénomène de marée (écart d'altitude entre la surface libre et la sphère de rayon  $R_T$ ) est très largement surestimée par rapport au rayon terrestre  $R_T$  et l'angle  $d\theta$  est extrêmement petit en réalité... Commençons par évaluer l'excès (au sens algébrique du terme) de volume d'eau dû à la marée, compris entre le cône de sommet  $O$ , de demi-angle au sommet  $\theta$ , et le cône de sommet  $O$  et de demi-angle au sommet  $\theta+d\theta$  (voir figure au-dessus) ; l'axe de symétrie de ces cônes est orienté de  $O$  vers le centre de la lune. Dans le plan de figure, l'intersection de l'espace occupé par cette eau excédentaire située entre ces deux cônes, avec le plan de figure, est constituée de deux rectangles élémentaires, symétriques par rapport à l'axe des centres de la terre et de la lune, dont la hauteur est  $h$  et la largeur  $R_T \cdot d\theta$  ; l'aire élémentaire de ces rectangles est ainsi :  $dS = h \cdot R_T \cdot d\theta$ . La figure est invariante par rotation autour de l'axe des centres. Le volume d'eau élémentaire recherché est donc le produit de  $dS$  par le périmètre du cercle de rayon  $R = R_T \cdot \sin(\theta)$  soit :  $dV = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dS = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot R_T^2 \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$ . Le volume total  $V$  s'obtient en intégrant l'expression précédente entre zéro et  $\pi$ . Ce volume devant être nul, on obtient finalement :

$$0 = 2 \cdot \pi \cdot R_T^2 \int_0^\pi h \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta ;$$

soit :

$$\int_0^\pi \left[ \frac{3}{4} \cdot \frac{m_L \cdot R_T^4}{m_T \cdot d^3} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + C \right] \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{m_L \cdot R_T^4}{m_T \cdot d^3} \cdot \int_0^\pi \cos(2 \cdot \theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta + C \cdot \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot d\theta = 0 .$$

En remplaçant  $\cos(2 \cdot \theta)$  par  $2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$ , on obtient :

$$\int_0^\pi \cos(2 \cdot \theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = \left[ -\frac{2}{3} \cdot \cos^3(\theta) + \cos(\theta) \right]_0^\pi = -\frac{2}{3} .$$

$$C \cdot \int_0^\pi \sin(\theta) \cdot d\theta = C \cdot [-\cos(\theta)]_0^\pi = 2 \cdot C .$$

D'où :

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{m_L \cdot R_T^4}{m_T \cdot d^3} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) + 2 \cdot C = 0 ; \text{ soit : } C = \frac{m_L \cdot R_T^4}{4 \cdot m_T \cdot d^3} .$$

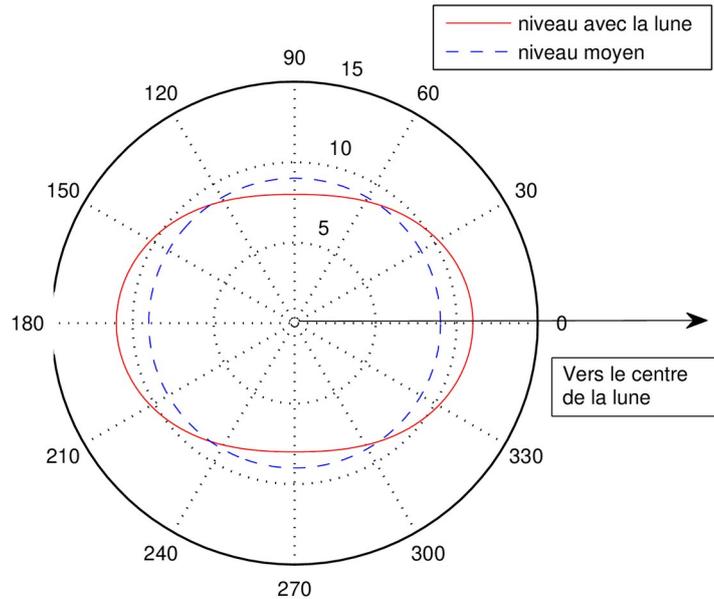
En reportant cette valeur dans l'expression générale de  $h$  et en remplaçant  $\cos(2 \cdot \theta)$  par  $2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$ , on obtient :

$$h = \frac{m_L \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d^3} \left[ \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot \cos^2(\theta) - 1) - \frac{1}{2} \right].$$

Soit après simplification :

$$h = \frac{m_L \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d^3} \cdot (3 \cdot \cos^2(\theta) - 1).$$

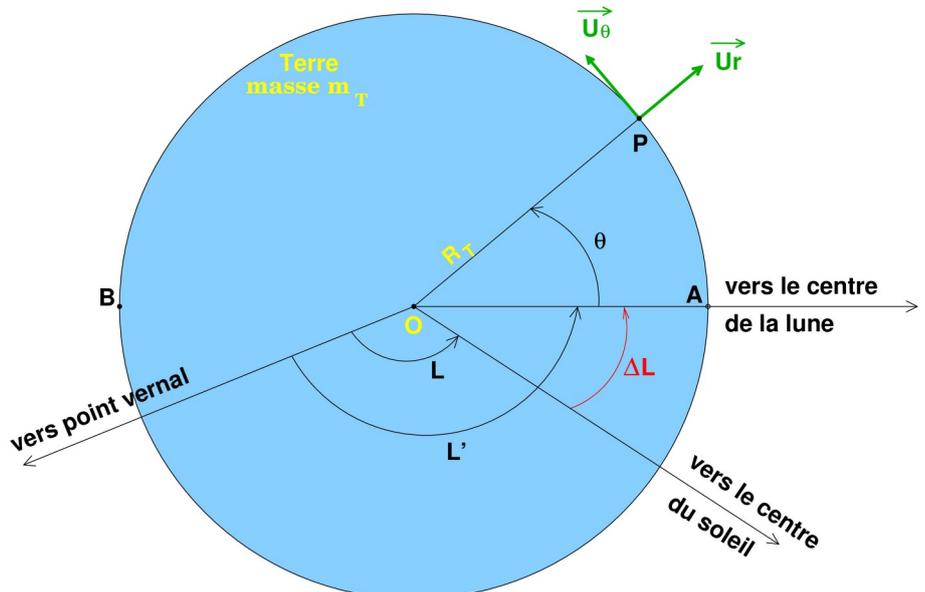
La figure ci-dessous, obtenue sous MATLAB, trace la courbe représentant les variations de  $h$  en fonction de  $\theta$ . Pour plus de clarté, les valeurs de  $h$  sont fortement exagérées par rapport au rayon terrestre.



### III.4. Surface libre des océans en présence de la lune et du soleil.

L'influence du soleil, s'étudie de la même manière que celle de la lune : il suffit de remplacer dans les calculs  $m_L$  par  $m_S$  et  $d = d_{TL}$  par  $d_{TS}$ . On suppose que la variation du niveau de l'eau est la somme des deux variations dues au soleil seul et à la lune seule.

Faisons d'abord un calcul simplifié en supposant le centre de la lune dans le plan de l'écliptique (on néglige l'inclinaison de la trajectoire du centre de la lune qui est d'environ  $6^\circ$ ...). Si le point P de la périphérie terrestre est dans le plan de l'écliptique les choses ont simple : si on note toujours  $\theta$  l'angle entre (OP) et (OO<sub>L</sub>), l'angle entre



[Retour à la page d'accueil](#)

(OP) et (OO<sub>S</sub>) devient ( $\theta + \Delta L$ ),  $\Delta L$  désignant la différence de longitude éclipstique entre la lune et le soleil (voir schéma ci-dessus). On obtient simplement :

$$h = \frac{m_L \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d_{T-L}^3} \cdot (3 \cdot \cos^2(\theta) - 1) + \frac{m_S \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d_{T-S}^3} \cdot (3 \cdot \cos^2(\theta + \Delta L) - 1).$$

Application numérique avec les distances moyennes déjà utilisées :

$$\frac{m_L \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d_{T-L}^3} = 17,87 \text{ cm} ; \quad \frac{m_S \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d_{T-S}^3} = 8,16 \text{ cm} .$$

*Remarque : on retrouve entre ces deux hauteurs le rapport de 2,19 déjà calculé en fin de paragraphe II.2, montrant ainsi la prépondérance de l'influence de la lune sur les marées à la surface de la terre.*

### III.5. Influence des phases de la lune sur l'amplitude des marées.

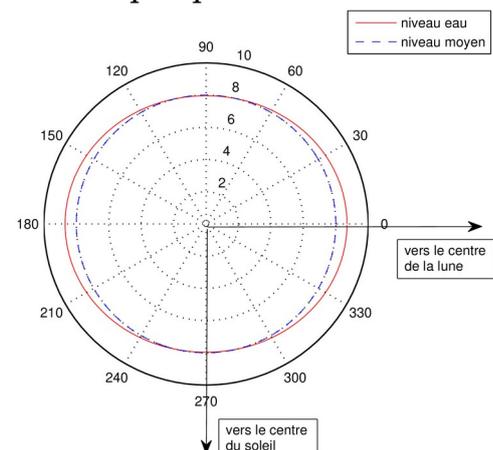
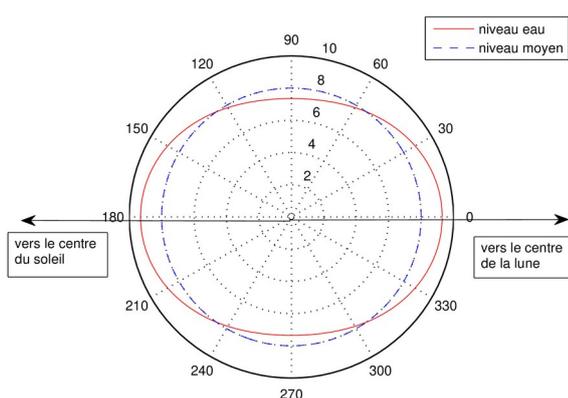
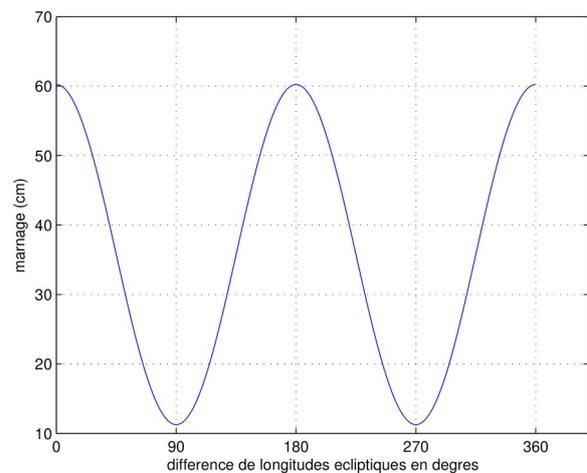
Pour cette étude, nous allons nous intéresser à l'influence de  $\Delta L$  sur les hauteurs d'eau à marée haute, c'est à dire pour  $\theta = 0^\circ$  ou  $180^\circ$  soit  $\cos(\theta) = \pm 1$ . Dans ce cas particulier, nous avons :

$$h_1 = 17,87 \cdot 2 + 8,16 \cdot [3 \cdot \cos^2(\Delta L) - 1].$$

Nous étudions également l'influence de  $\Delta L$  sur les hauteurs d'eau à marée basse, c'est à dire pour  $\theta = 90^\circ$  ou  $270^\circ$  soit  $\cos(\theta) = 0$ . Dans ce cas particulier, nous avons :

$$h_2 = -17,87 + 8,16 \cdot [3 \cdot \cos^2(90 + \Delta L) - 1].$$

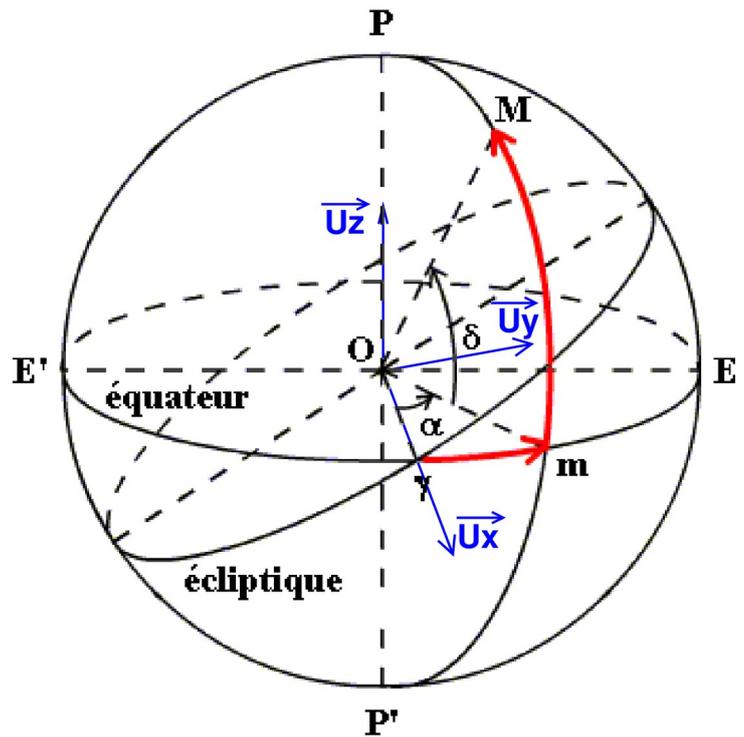
La courbe ci-contre représente la variation de l'amplitude (ou « marnage ») ( $h_1 - h_2$ ) de la marée en fonction de  $\Delta L$ . La courbe montre bien que le marnage est maximum pour  $\Delta L = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ , soit à la pleine lune et à la nouvelle lune : il y a alors une marée de vives eaux. Le marnage est minimum pour  $\Delta L = 90^\circ$  ou  $270^\circ$  soit à chaque quartier.



Autre représentation possible du phénomène : les courbes ci-dessus montrent les déformations de la surface de l'eau dans le plan de l'éclipstique pour une pleine lune (courbe de gauche) puis pour un dernier quartier (courbe de droite) dans le plan de l'éclipstique. Dans le premier cas la déformation est beaucoup plus importante que dans le second.

### III.6. Influence de la longitude et de la latitude terrestre sur la hauteur d'eau.

Les calculs précédents sont effectués pour des points de la surface terrestre situés dans le plan de l'écliptique en négligeant l'inclinaison de la trajectoire de la lune. Pour avoir une expression générale de la hauteur d'eau  $h$ , il faut exprimer  $\cos(\theta)$  en fonction de la latitude  $\varphi$ , de la longitude  $l$  du point P de la surface terrestre ainsi que des coordonnées équatoriales du soleil de et la lune : ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$ . Soit un point M quelconque de la sphère céleste de rayon arbitraire égal à 1 dont les coordonnées équatoriales sont  $\alpha$  et  $\delta$  (voir figure ci-contre). Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  s'exprime dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  de la façon suivante (axe (OX) orienté vers le point vernal  $\gamma$ ) :



$$\overrightarrow{OM} = \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{u}_x + \cos(\delta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{u}_y + \sin(\delta) \cdot \vec{u}_z .$$

De façon analogue, un vecteur unitaire orienté de O vers le centre  $O_L$  de la lune a pour expression dans la même base :

$$\vec{V}_L = \cos(\delta_L) \cdot \cos(\alpha_L) \cdot \vec{u}_x + \cos(\delta_L) \cdot \sin(\alpha_L) \cdot \vec{u}_y + \sin(\delta_L) \cdot \vec{u}_z .$$

Pour un point P de la surface terrestre, la déclinaison est égale à la latitude  $\varphi$  et l'ascension droite  $\alpha_P$  est celle du méridien de Greenwich  $\alpha_G$ , donnée par les tables d'éphémérides, augmentée de la longitude  $l$ . Un vecteur unitaire orienté de O vers P a pour expression dans la même base :

$$\vec{V}_P = \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha_P) \cdot \vec{u}_x + \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha_P) \cdot \vec{u}_y + \sin(\varphi) \cdot \vec{u}_z .$$

Par définition du produit scalaire :  $\cos(\theta) = \vec{V}_L \cdot \vec{V}_P$  ; cela conduit à :

$$\cos(\theta) = \cos(\delta_L) \cdot \cos(\alpha_L) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha_P) + \cos(\delta_L) \cdot \sin(\alpha_L) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha_P) + \sin(\delta_L) \cdot \sin(\varphi) ;$$

soit :

$$\cos(\theta) = \cos(\delta_L) \cdot \cos(\varphi) \cdot [\cos(\alpha_L) \cdot \cos(\alpha_P) + \sin(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_P)] + \sin(\delta_L) \cdot \sin(\varphi) .$$

On reconnaît entre les crochets l'expression du cosinus de la différence des ascensions droites du méridien local et de la lune souvent appelé « angle horaire » de la lune :

$$H_L = \alpha_P - \alpha_L = \alpha_G + l - \alpha_L ;$$

Finalement :

$$\cos(\theta) = \cos(\delta_L) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(H_L) + \sin(\delta_L) \cdot \sin(\varphi) .$$

Nous avons besoin de l'expression de  $Y = (3 \cdot \cos^2(\theta) - 1)$  pour déterminer les hauteur d'eau. Le calcul est un peu long ; il se simplifie en tenant compte des trois relations classiques :

$$\cos^2(H_L) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2 \cdot H_L)}{2} ; 2 \cdot \cos(\delta_L) \cdot \sin(\delta_L) = \sin(2 \cdot \delta_L) ; 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \sin(2 \cdot \varphi)$$

$$Y_L = \frac{1}{2} \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\varphi)) \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\delta_L)) + \frac{3}{2} \cdot [\sin(2 \cdot \varphi) \cdot \sin(2 \cdot \delta_L) \cdot \cos(H_L) + \cos^2(\varphi) \cdot \cos^2(\delta_L) \cdot \cos(2 \cdot H_L)]$$

Pour l'angle  $\theta'$  entre les droites  $OO_S$  et  $OP$ , le calcul se mène de façon identique, il suffit de remplacer la déclinaison de la lune par celle du soleil  $\delta_S$  et de définir l'angle horaire du soleil comme la différence entre les ascensions droites du méridien local et du soleil :  $H_S = \alpha_P - \alpha_S$ . On pose  $Y_S = (3 \cdot \cos^2(\theta') - 1)$  et on obtient :

$$Y_S = \frac{1}{2} \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\phi)) \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\delta_S)) + \frac{3}{2} \cdot [\sin(2 \cdot \phi) \cdot \sin(2 \cdot \delta_S) \cdot \cos(H_S) + \cos^2(\phi) \cdot \cos^2(\delta_S) \cdot \cos(2 \cdot H_S)]$$

La hauteur d'eau devient ainsi :

$$h = \frac{m_L \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d_{T-L}^3} \cdot Y_L + \frac{m_S \cdot R_T^4}{2 \cdot m_T \cdot d_{T-S}^3} \cdot Y_S ;$$

soit, exprimée en cm pour les valeurs moyennes des distances entre les astres :

$$h = 17,87 \cdot Y_L + 8,16 \cdot Y_S .$$

Faisons quelques commentaires sur le terme prépondérant correspondant à l'influence de la lune : il est la somme de trois termes :

- le terme dit « semi-diurne » :  $\frac{3}{2} \cdot 17,87 \cdot \cos^2(\phi) \cdot \cos^2(\delta_L) \cdot \cos(2 \cdot H_L)$  .  $H_L$  représente l'angle

angle le plan méridien contenant le point P et le plan méridien contenant le centre de la lune ; cet angle augmente de  $360^\circ$  par jour lunaire ; l'angle  $2H_L$  augmente de  $360^\circ$  tous les demi-jours lunaire. La période de variation de hauteur due à ce terme est le demi-jour lunaire d'où l'expression « terme semi-diurne) . L'amplitude est d'autant plus grande que  $\phi$  est petit donc que le point d'observation est proche de l'équateur. L'amplitude dépend de  $\cos^2(\delta_L)$  : elle sera maximale pour  $\delta_L$  proche de zéro, soit lorsque ce centre de la lune est proche du plan équatorial.

- le terme dit « diurne » :  $\frac{3}{2} \cdot 17,87 \cdot \sin(2 \cdot \phi) \cdot \sin(2 \cdot \delta_L) \cdot \cos(H_L)$  car sa période de variation est

le jour lunaire. Par rapport au terme précédent, celui-ci modifie la hauteur d'eau mais n'influence pas la période semi-diurne des marées : superposer à un terme sinusoïdal un autre terme sinusoïdal de période double ne modifie pas la période de la somme (théorème de Fourier...).

- un troisième terme :  $\frac{1}{2} \cdot 17,87 \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\phi)) \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\delta_L))$  qui varie avec une période égale

à la moitié de la période de variation de  $\delta_L$  soit une période d'un demi-mois draconitique.

Enfin, cette hauteur est inversement proportionnelle au cube de  $d_{T-S}$  et  $d_{T-S}$  fluctue autour de sa valeur moyenne avec une période d'un mois anomalistique.

Une analyse analogue est possible pour l'influence du soleil ; il suffit de remplacer jour lunaire par jour solaire et mois par année pour l'analyse des périodes...

## **IV. Prévision actuelle des marées.**

### **IV.1. Mérites et insuffisances de la théorie statique.**

La théorie statique rend compte correctement du rythme semi-diurne des marées et permet d'expliquer correctement l'influence des phases de la lune et l'influence des saisons sur leurs amplitudes. Plus généralement, on peut dire qu'elle identifie bien de nombreux paramètres dont dépendent les hauteurs d'eau. Elle présente néanmoins des insuffisances graves.

En premier lieu : c'est une théorie statique ; à cause de son inertie, l'eau ne peut pas être constamment en état d'équilibre : une modification des perturbations comme les

déplacements de la lune et du soleil par rapport à la surface terrestre n'est pas répercutée instantanément sur le niveau d'eau. Ainsi, la marée haute à un endroit donné n'a pas lieu exactement lorsque la lune passe au plus près du lieu mais avec un certain retard. De même les marées de vives eaux n'ont pas lieu exactement à la pleine lune ou à la nouvelle lune mais trois jours plus tard environ. La théorie statique néglige la présence des continents, or le découpage des côtes et les irrégularités du relief des fonds marins engendrent des retards supplémentaires : par rapport à la lune, le retard de la marée haute sera plus grand pour un port située au fond d'une baie que pour un port situé sur une côte presque rectiligne proche de hauts fonds... Enfin, l'eau étant en mouvement par rapport à un repère non galiléen (la terre) , il faut tenir compte des forces d'inertie de Coriolis... Pour tenir compte de ces retards, on remplace dans les formules précédentes les angles horaires  $H_L$  et  $H_S$  par des « angles horaires retardés » ( $H_L - r_L$ ) et ( $H_S - r_S$ ) où les angles de retard  $r_L$  et  $r_S$  sont déterminés expérimentalement pour chaque port.

En second lieu : les amplitudes des marées prévues par la théories sont très inférieures en général à celles constatées : la théorie prévoit un marnage maximum de 60cm environ alors qu'il atteint souvent quelques mètres. La théorie statique suppose la profondeur des océans constante, ce qui est évidemment faux ; la diminution rapide de cette profondeur à l'approche des côtes ainsi que le découpage des côtes influencent de façon importante la hauteur d'eau. Pour compliquer la situation, des phénomènes de résonance peuvent intervenir : si une fréquence propre d'un océan ou d'un bassin maritime particulier coïncide avec la fréquence d'un des termes de marée définies précédemment, ce terme est considérablement amplifié. Ainsi la distance entre la côte est de l'Amérique du Nord et la côte de l'Europe de l'Ouest amplifie le terme semi-diurne de la marée ; en revanche, les dimensions du golfe du Mexique amplifie le terme diurne au point de le rendre prépondérant : on observe là-bas seulement une marée haute et une marée basse par jour lunaire. Pour tenir compte de cela, les amplitudes des différents termes de la formule statique sont remplacés par des constantes déterminées expérimentalement pour chaque port. On obtient ainsi, pour chaque port, une formule de la hauteur d'eau de la forme :

$$h = P_L \cdot \left[ A_1 \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\delta_L)) + A_2 \cdot [\sin(2 \cdot \delta_L) \cdot \cos(H_L - r_L)] + A_3 \cdot \cos^2(\delta_L) \cdot \cos(2 \cdot (H_L - r_L)) \right] + \dots$$

$$\dots P_S \cdot \left[ A_4 \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(\delta_S)) + A_5 \cdot [\sin(2 \cdot \delta_S) \cdot \cos(H_S - r_S)] + A_6 \cdot \cos^2(\delta_S) \cdot \cos(2 \cdot (H_S - r_S)) \right] ;$$

$$\text{avec : } P_L = \left( \frac{d_{T-L} \text{ moyen}}{d_{T-L}} \right)^3 ; P_S = \left( \frac{d_{T-S} \text{ moyen}}{d_{T-S}} \right)^3 .$$

Cette formule semi-empirique a longtemps été utilisée en France. En effet, une théorie dynamique qui tiendrait compte à l'échelle de la terre du découpage des côtes, des variations de profondeur, des résonances, est totalement impossible à élaborer.

*Remarque à propos du phénomène de résonance : pour mieux comprendre, imaginons la surface libre de l'eau d'une piscine que l'on perturbe périodiquement, par exemple en enfonçant puis relevant périodiquement une lourde plaque (en jaune sur la photographie ci-dessous). Ce mouvement provoque des vagues qui se propagent à partir de la plaque puis se réfléchissent sur les parois du bassin pour se superposer aux vagues que continue à émettre la plaque.*

*On constate que, pour certaines fréquences particulières du mouvement de la plaque appelées fréquences propres du bassin, la superposition de ces vagues produit une vague de très grande amplitude : il y a résonance. Le phénomène est utilisé dans les « piscines à vagues » (voir photographie). Il intervient dans le phénomène de marée avec bien sûr des fréquences beaucoup plus faibles.*

*Dans d'autres piscines à vagues, l'excitation périodique*



n'est pas obtenue par le mouvement d'une plaque mais par l'injection à intervalles réguliers d'eau ou d'air ...

## IV.2. Méthode actuelle de prévision des marées : méthode des harmoniques.

Nous avons déjà inventorié un certain nombre de phénomènes périodiques qui influencent la hauteur d'eau : influence semi-diurne de la lune, influence semi-diurne du soleil, influence diurne du soleil, influence diurne de la lune, influence annuelle du soleil, influences mensuelles de la lune... Si on tient compte de la complexité du mouvement de la lune et des influences faibles des autres planètes du système solaire, on dénombre une centaine de phénomènes périodiques influençant la hauteur d'eau  $h$  ; leurs périodes sont connues grâce aux mesures astronomiques, on les note  $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ . La méthode actuelle consiste à écrire la hauteur d'eau  $h$  comme une somme de  $N$  fonctions sinusoïdales (les « harmoniques » en mathématique) ayant les périodes définies précédemment :

$$h = h_0 + h_1 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1} - \phi_1\right) + \dots + h_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_i} - \phi_i\right) + \dots = h_0 + \sum_{i=1}^N h_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_i} - \phi_i\right).$$

$t$  est le temps solaire moyen local exprimé en heures décimales ;  $h_0$  désigne la hauteur d'eau moyenne.

Les hauteurs d'eau sont enregistrées en continu dans un grand nombre de ports. Les théories mathématiques d'analyse du signal et les performances des ordinateurs permettent de déduire des enregistrements les amplitudes  $h_0, h_1, \dots$  et les déphasages  $\phi_1, \phi_2, \dots$  pour chacun des ports de référence étudiés.

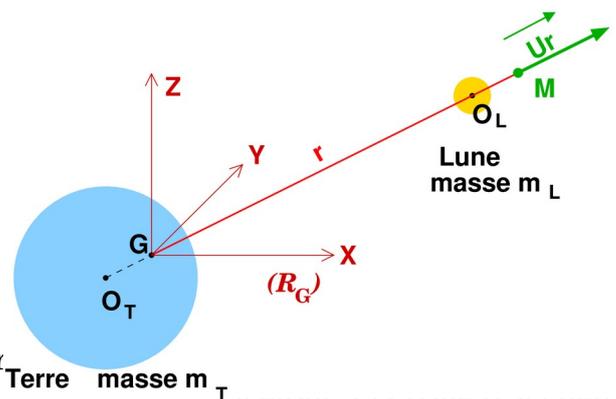
Ces mesures et ces calculs sont confiés en France à un organisme officiel : le SHOM (Service hydrographique et océanographique de la marine) qui publie ses résultats sous forme d'annuaires. Le site du SHOM : <http://refmar.shom.fr/fr/documentation/supports-tipe;jsessionid=1B988F0101884594BF88CC28A7CFEE9E> publie un fichier : « [formulation.pdf](#) » explicitant les calculs mais limité aux 21 premiers termes de la formule... Cela permet néanmoins d'obtenir des résultats assez précis (cette méthode est d'ailleurs reprise par diverses applications pour téléphones mobiles).

*Remarque : les horaires des marées hautes et basses publiés par le SHOM sont très fiables. Concernant les hauteurs d'eau, les aléas climatiques peuvent apporter des modifications impossibles à prévoir : un vent très fort peut augmenter ou diminuer les hauteurs d'eau au voisinage des côtes selon que le vent souffle de la mer vers la terre ou l'inverse ; de plus, les hauteurs d'eau sont très sensibles aux variations de pression atmosphérique : une variation de seulement dix hectopascals, soit dix millibars (un peu moins d'un centième de la pression atmosphérique moyenne...) entraîne une variation de hauteur d'eau de 10 cm...*

## V. Influence du phénomène des marées sur la distance terre - lune.

### V.1. Moment cinétique du système terre - lune.

Comme dans le paragraphe III.1, nous négligeons l'influence du soleil, ce qui revient à considérer le système terre - lune comme isolé et le repère barycentrique  $R_G$  comme galiléen.



Pour alléger les notations, on pose :

$$\vec{r} = \overline{O_T O_L} ; \vec{r}_1 = \overline{G O_T} ; \vec{r}_L = \overline{G O_L} .$$

Par définition du barycentre du système, on obtient :

$$\vec{r}_T = -\frac{m_L \cdot \vec{r}}{m_L + m_T} ; \vec{r}_L = \frac{m_T \cdot \vec{r}}{m_L + m_T} ; m_L \cdot \vec{r}_L + m_T \cdot \vec{r}_T = \vec{0} .$$

Le moment cinétique (noté  $\vec{\sigma}$ ) du système, calculé dans  $R_G$ , est la somme de deux vecteurs : le moment cinétique orbital  $\sigma_o$  dû au mouvement de translation des deux astres dans  $R_G$  et le moment cinétique de rotation propre  $\sigma_r$  dû aux rotations des deux astres autour des axes de leurs pôles.

$$\vec{\sigma}_r = J_L \cdot \vec{\Omega}_L + J_T \cdot \vec{\Omega}_T$$

où  $J_L$  et  $J_T$  désignent les moments d'inertie des deux astres par rapport aux axes des pôles et  $\Omega_L$  et  $\Omega_T$  désignent les vecteurs rotation instantanée des deux astres, définis dans  $R_G$ .

$$\vec{\sigma}_o = m_L \cdot \vec{r}_L \wedge \vec{V}_{O_L} + m_T \cdot \vec{r}_T \wedge \vec{V}_{O_T}$$

où  $\vec{V}_{O_L}$  et  $\vec{V}_{O_T}$  désignent les vecteurs vitesses dans  $R_G$  des centres des deux astres. Les relations de définition de barycentre permettent de simplifier l'expression du moment cinétique orbital :

$$\vec{\sigma}_o = \frac{m_L \cdot m_T}{m_L + m_T} \cdot \vec{r} \wedge (\vec{V}_{O_L} - \vec{V}_{O_T}) .$$

On appelle « masse réduite » du système, la masse  $\mu = \frac{m_L \cdot m_T}{m_L + m_T}$  ;

la différence de vitesse peut s'écrire :  $(\vec{V}_{O_L} - \vec{V}_{O_T}) = d \frac{(\overline{O_T O_L})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  . Imaginons un objet

**fictif** de masse  $\mu$  suffisamment petit pour être assimilé à un point M tel qu'à chaque instant :

$$\overline{GM} = \overline{O_T O_L} = \vec{r} ;$$

Le moment cinétique orbital du système terre – lune est à chaque instant égal à celui de ce point fictif M :

$$\vec{\sigma}_o = \mu \cdot \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \mu \cdot \overline{GM} \wedge \vec{V}_M .$$

Appliquons maintenant la relation fondamentale de la dynamique à la lune en notant  $\vec{a}_{O_L}$  le vecteur accélération de  $O_L$  dans  $R_G$  . La seule force appliquée est l'attraction gravitationnelle exercée par la terre :

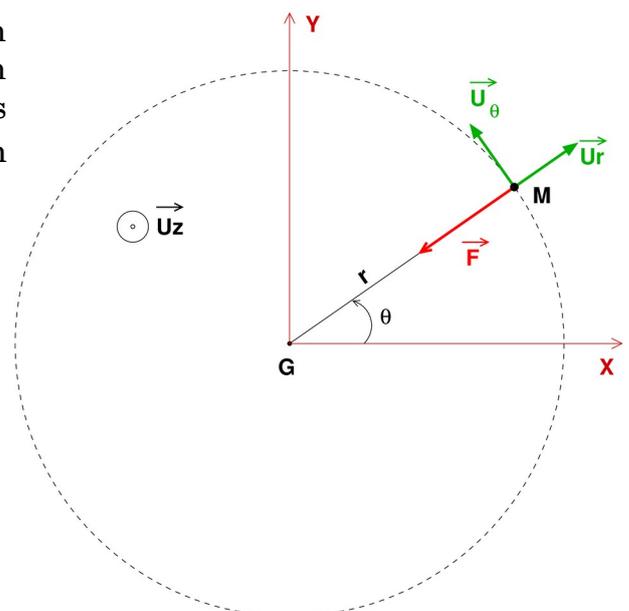
$$m_L \cdot \vec{a}_{O_L} = -K \cdot \frac{m_L \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

avec  $\vec{u}_r$  : vecteur unitaire ayant le sens et la direction du vecteur  $\vec{r}$  .

$$m_L \cdot \vec{a}_{O_L} = \frac{m_L \cdot d^2 \vec{r}_L}{dt^2} = m_L \cdot m_T \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \mu \cdot \vec{a}_M .$$

D'où :

$$\mu \cdot \vec{a}_M = -K \cdot \frac{m_L \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{u}_r = \vec{F} .$$



Conséquence : le point fictif M se déplace dans le repère  $R_G$  comme s'il était soumis à la force gravitationnelle exercée par la terre sur la lune. L'étude de ce mouvement est un classique : dans le cas général la trajectoire est une conique, dans le cas particulier qui nous occupe, c'est une ellipse de très faible excentricité. Nous allons pour simplifier, assimiler ce mouvement à un mouvement circulaire uniforme. L'accélération de M dans  $R_G$  est alors un vecteur radial centripète de norme  $r \cdot \omega^2$  où  $\omega$  désigne la vitesse angulaire orbitale de M. On obtient ainsi :

$$\mu \cdot \vec{a}_M = -K \cdot \frac{m_L \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{u}_r = -\mu \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r ;$$

on en déduit l'expression de la vitesse angulaire de M dans  $R_G$  :

$$\omega = \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^3}} ;$$

ainsi que l'expression du vecteur vitesse de M dans  $R_G$  :

$$\vec{V}_M = r \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta = \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r}} \cdot \vec{u}_\theta .$$

Cela conduit à l'expression du moment cinétique orbital du système terre -lune dans  $R_G$  :

$$\vec{\sigma}_O = \mu \cdot r \cdot \vec{u}_r \wedge \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r}} \cdot \vec{u}_\theta = \mu \cdot \sqrt{K \cdot (m_L + m_T)} \cdot r \cdot \vec{u}_z .$$

D'où finalement l'expression générale du moment cinétique du système terre – lune dans  $R_G$  :

$$\vec{\sigma} = J_L \cdot \vec{\Omega}_L + J_T \cdot \vec{\Omega}_T + \mu \cdot \sqrt{K \cdot (m_L + m_T)} \cdot r \cdot \vec{u}_z .$$

Le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  est perpendiculaire au plan de la trajectoire conformément au schéma ci-dessus. En négligeant l'influence du soleil, on peut considérer le système terre – lune comme isolé, **ce qui permet de considérer le moment cinétique du système comme constant au cours du temps.**

## V.2. Influence des marées sur la distance terre - lune.

Nous en avons parlé au paragraphe V.6.8 du texte principal : les forces de marées tendent à déplacer périodiquement les masses d'eau et à déformer périodiquement les roches : cela génère des frottements donc une perte d'énergie de chaque astre qui tend à diminuer les vitesses de rotation propre des deux astres  $\Omega_L$  et  $\Omega_T$  . La formule du moment cinétique obtenue montre qu'**une diminution de  $\Omega_L$  et  $\Omega_T$  implique une augmentation de la distance r entre les deux astres : la diminution du moment cinétique due aux rotations propres entraîne une augmentation du moment cinétique orbital.** Les forces de marées sur la lune sont beaucoup plus intenses sur la lune que sur la terre : le ralentissement de la rotation propre de la lune a été le plus important au cours des millénaires ; **le synchronisme pour la lune est maintenant atteint :  $\Omega_L = \omega$  et cela s'est traduit par un doublement de la distance terre – lune.**

Le synchronisme pour la terre n'étant pas atteint, **les forces de marées continuent à diminuer la vitesse de rotation propre de la terre, donc à provoquer une très lente augmentation de la distance terre – lune.**

### V.3. Évaluation de l'actuelle vitesse d'augmentation de la distance terre - lune.

Les mesures montrent que la durée du jour stellaire  $J_{ST}$  augmente à raison de 2,30 millièmes de seconde par siècle. Soit  $J_{ST}$  la durée d'un jour stellaire ; si les angles sont mesurés en radians, nous avons :

$$\Omega_T = \frac{2 \cdot \pi}{J_{ST}} ;$$

soit en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{d\Omega_T}{dt} = -\frac{2 \cdot \pi}{J_{ST}^2} \cdot \frac{dJ_{ST}}{dt} .$$

Les vecteurs  $\vec{u}_z$ ,  $\Omega_L$  et  $\Omega_T$  ne sont pas colinéaires. L'angle entre  $\vec{u}_z$  et  $\Omega_L$  est l'obliquité de l'axe des pôles lunaires, soit  $\epsilon' = 6,7^\circ$ . La valeur de l'angle entre  $\vec{u}_z$  et  $\Omega_T$  est plus compliquée à évaluer : elle dépend de l'obliquité  $\epsilon$  de l'axe des pôles terrestres, de l'inclinaison  $i$  du plan de la trajectoire par rapport au plan de l'écliptique et de l'orientation de ce plan, donc de l'angle  $\Omega$  du schéma n° 19 du document principal ; cet angle varie donc avec une période de 18,6 années. L'angle recherché varie entre  $(\epsilon - i)$  si  $\Omega = 0^\circ$  et  $(\epsilon + i)$  si  $\Omega = 180^\circ$  ; sa valeur moyenne est égale à  $\epsilon$  ; nous la retenons pour les calculs qui suivent. La composante du moment cinétique perpendiculaire au plan de la trajectoire de M reste constante au cours du temps :

$$\sigma_z = J_T \cdot \Omega_T \cdot \cos(\epsilon) + J_L \cdot \omega \cdot \cos(\epsilon') + \mu \cdot \sqrt{K \cdot (m_L + m_T)} \cdot r ;$$

$$\sigma_z = J_T \cdot \Omega_T \cdot \cos(\epsilon) + J_L \cdot \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^3}} \cdot \cos(\epsilon') + \mu \cdot \sqrt{K \cdot (m_L + m_T)} \cdot r .$$

$\sigma_z$  ne varie pas au cours du temps, sa dérivée par rapport au temps est nulle à chaque instant :

$$0 = J_T \cdot \cos(\epsilon) \cdot \frac{d\Omega_T}{dt} - \frac{3}{2} \cdot J_L \cdot \cos(\epsilon') \cdot \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^5}} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r}} \cdot \frac{dr}{dt} .$$

Le moment d'inertie d'une boule homogène de masse  $m$  et de rayon  $R$ , par rapport à un axe de rotation passant par son centre, vaut  $J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$ . Le noyau central de la terre est

beaucoup plus dense que sa périphérie, son moment d'inertie est donc plus faible que celui d'une boule homogène :  $J_T = 0,330 \cdot m_T \cdot R_T^2$  ; le noyau de la lune est relativement beaucoup moins important, le moment d'inertie de la lune est proche de celui d'une boule homogène :  $J_L = 0,395 \cdot m \cdot R_L^2$ . Cela nous conduit à l'expression de la vitesse de variation de la distance terre - lune :

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{0,33 \cdot m_T \cdot R_T^2 \cdot \cos(\epsilon) \cdot \frac{d\Omega_T}{dt}}{\frac{3}{2} \cdot 0,395 \cdot m_L \cdot R_L^2 \cdot \cos(\epsilon') \cdot \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^5}} - \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r}}} .$$

Applications numériques :

$$\frac{d\Omega_T}{dt} = -1,95 \cdot 10^{-14} \text{ rad/an} ; m_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; m_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg} ; R_T = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} ;$$

$$R_L = 1,75 \cdot 10^6 \text{ m} ; r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m} ; \mu = 7,25 \cdot 10^{22} \text{ kg} ; K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ U.S.I.} ; \epsilon = 23,43^\circ ;$$

$\epsilon' = 6,7^\circ$ . Le calcul conduit à :

$$\frac{dr}{dt} = 3,86 \text{ cm/an} .$$

La valeur expérimentale, mesurée par télémétrie laser depuis la pose sur la lune de miroirs réfléchissant, conduit à 3,76cm environ par an. Nous obtenons une valeur très proche de la valeur expérimentale. Le faible écart constaté est dû aux hypothèses simplificatrices retenues ; nous avons en particuliers négligé l'influence du soleil...

#### **V.4. Influence des marées sur l'énergie mécanique du système terre - lune.**

L'expression déjà démontrée de la vitesse angulaire de M dans  $R_G$  :

$$\omega = \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^3}}$$

permet de prévoir qu'une augmentation de r se traduit par une diminution de  $\omega$  donc par une augmentation de la durée du mois sidéral :  $M_S = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{K \cdot (m_L + m_T)}}$ .

Par différentiation logarithmique, nous obtenons :

$$\frac{dM_S}{M_S} = \frac{3}{2} \cdot \frac{dr}{r} ; \text{ soit :}$$

$$\frac{dM_S}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_S}{r} \cdot \frac{dr}{dt} .$$

L'application numérique conduit à une augmentation de la durée du mois sidéral de 35 millièmes de seconde par siècle.

#### **V.5. Influence des marées sur l'énergie du système terre - lune et évolution du système à long terme.**

L'énergie mécanique du système est la somme de trois termes :

- l'énergie cinétique de rotation propre des deux astres :

$$E_{Cr} = \frac{1}{2} J_T \cdot \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \cdot \Omega_L^2 = \frac{1}{2} J_T \cdot \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \cdot \omega^2 ;$$

- l'énergie cinétique orbitale due aux vitesses des centres des deux astres ; on montre aisément qu'elle est égale à celle du point fictif M ;

$$E_{Co} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot V_M^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot r^2 \cdot \omega^2 ;$$

- l'énergie potentielle gravitationnelle associée à la force  $\vec{F}$  .

Les propriétés du gradient conduisent à :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{u}_r}{r^2} .$$

La force de gravitation  $\vec{F} = -K \cdot \frac{m_L \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{u}_r$  dérive donc d'une énergie potentielle  $E_p$  ; en effet, il est possible de poser :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \text{ avec } E_p = -\frac{K \cdot m_T \cdot m_L}{r} .$$

En tenant compte de la relation :  $\omega = \sqrt{\frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^3}}$ , on obtient :

$$\frac{-K \cdot m_T \cdot m_L}{r} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot r^2 \cdot \omega^2 = -\frac{K \cdot m_T \cdot m_L}{2 \cdot r}.$$

L'expression de l'énergie mécanique du système s'écrit :

$$Em = \frac{1}{2} J_T \cdot \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \cdot \omega^2 - \frac{K \cdot m_T \cdot m_L}{2 \cdot r} = \frac{1}{2} J_T \cdot \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \cdot \frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^3} - \frac{K \cdot m_T \cdot m_L}{2 \cdot r}.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{dEm}{dt} = 0,33 \cdot m_T \cdot R_T^2 \cdot \Omega_T \cdot \frac{d\Omega_T}{dt} - \frac{3}{2} \cdot 0,395 \cdot m_L \cdot R_L^2 \cdot \frac{K \cdot (m_L + m_T)}{r^4} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{K \cdot m_T \cdot m_L}{2 \cdot r^2} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Les valeurs numériques obtenues précédemment conduisent à :

$$\frac{dEm}{dt} = -1,10 \cdot 10^{20} \text{ J/an}.$$

En convertissant une année en secondes, on remarque que l'énergie perdue par seconde, c'est à dire la puissance des forces de frottement dues aux marées représente 3490GW (3490 gigawatt) soit la puissance d'environ 3500 centrales nucléaires... Bien sûr, ce calcul ne donne qu'un ordre de grandeur...

On peut ainsi imaginer que cette dissipation d'énergie continue à ralentir la rotation propre de la terre jusqu'à l'obtention du synchronisme : la durée du jour lunaire moyen sera alors égale à un mois sidéral : la terre présentera toujours la même hémisphère face à la lune ; pour les habitants de l'autre hémisphère, la lune ne serait jamais visible !

Restera alors le ralentissement de la rotation propre de la terre due aux effets de marée provoquées par le soleil mais ce ralentissement sera encore beaucoup plus lent : le synchronisme (durée du jour solaire égale à une année sidérale, la terre présentant toujours la même hémisphère face au soleil) ne devrait pas intervenir avant la disparition du soleil sous sa forme actuelle...

## V.6. Mouvements des centres de la terre et de la lune dans le référentiel barycentrique.

La distance terre - lune  $r = O_T O_L$  ainsi que l'énergie du système terre - lune ont été déduites des propriétés du point fictif M de masse  $\mu$ . Le mouvement de ce point M dans le repère barycentrique est une ellipse de très faible excentricité  $e_0$  dont G est un foyer. La position de M étant connue, les positions des centres  $O_L$  et  $O_T$  s'en déduisent par les relations déjà données :

$$\vec{r}_T = -\frac{m_L \cdot \vec{r}}{m_L + m_T}; \quad \vec{r}_L = \frac{m_T \cdot \vec{r}}{m_L + m_T}; \quad m_L \cdot \vec{r}_L + m_T \cdot \vec{r}_T = \vec{0}.$$

**Les trajectoires de  $O_L$  et  $O_T$  se déduisent de celle de M par deux homothéties de centre G et de rapports respectifs  $\frac{m_T}{m_T + m_L}$  et  $\frac{-m_L}{m_T + m_L}$ .** Ce sont également des

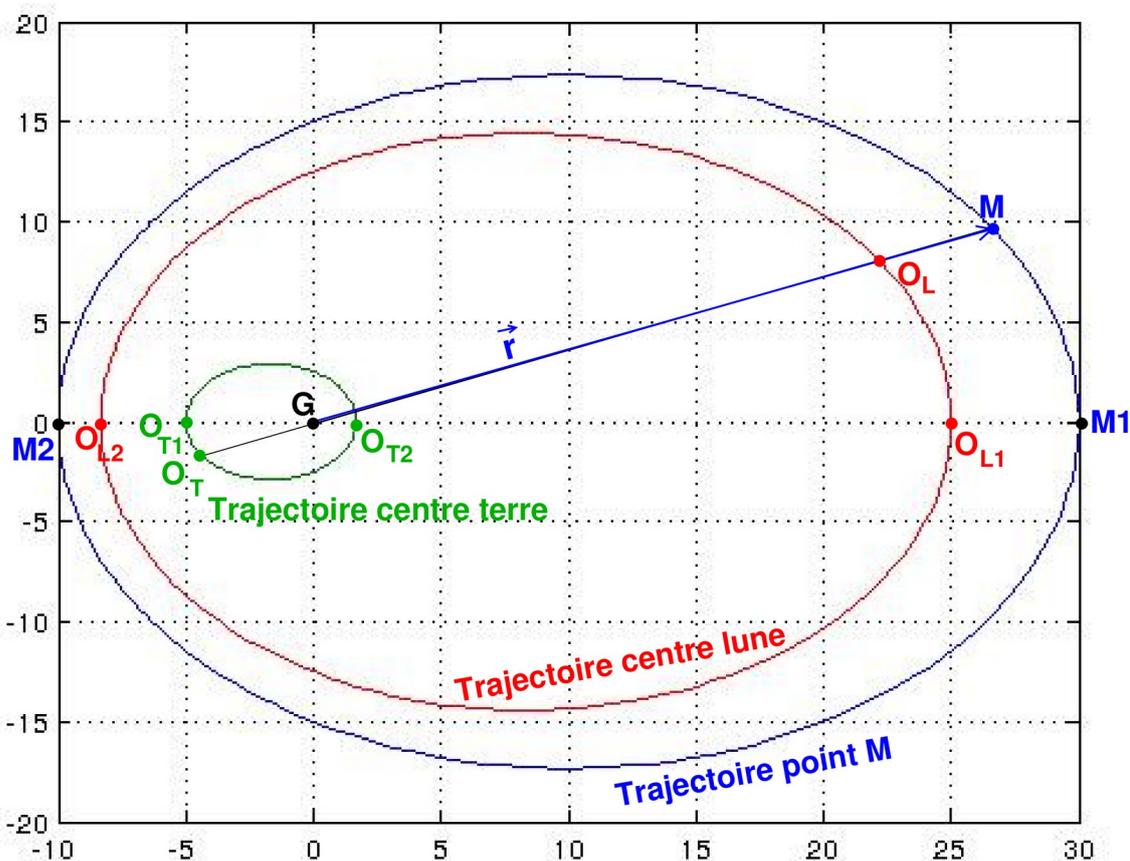
ellipses dont G est un des foyers.

Numériquement :  $m_T \approx 81 \cdot m_L$ . Ce qui conduit à :

$$\vec{r}_T = -\frac{m_L \cdot \vec{r}}{m_L + m_T} = -\frac{\vec{r}}{82} \approx 0,0122 \cdot \vec{r}; \quad \vec{r}_L = \frac{m_T \cdot \vec{r}}{m_L + m_T} = \frac{81}{82} \cdot \vec{r} \approx 0,988 \cdot \vec{r}.$$

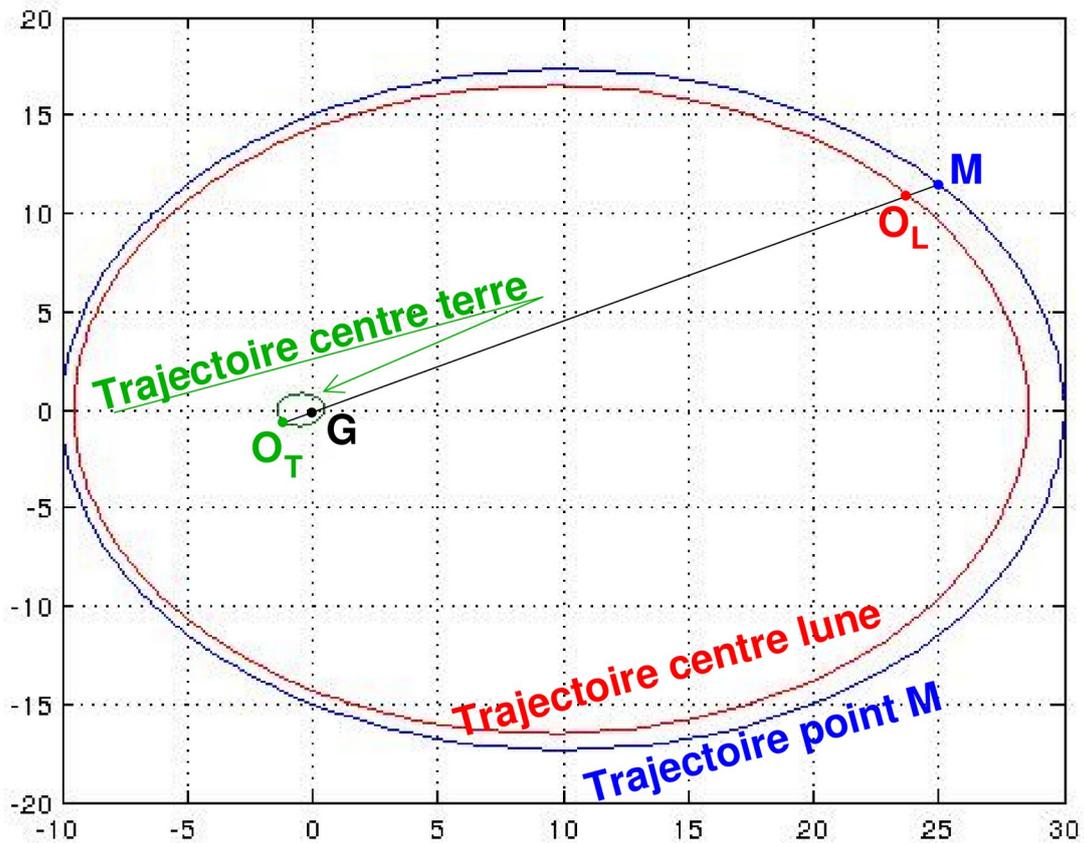
La distance  $r_T$  de G à  $O_T$  est très petite devant la distance terre – lune alors que la distance  $r_L$  de G à  $O_L$  est très voisine de la distance terre – lune. Comme nous l'avons fait dans le texte principal lors de la description de mouvement de la lune dans le repère géocentrique, il est donc possible de considérer les point  $O_T$  et G comme pratiquement confondus, tout en posant :  $\vec{r}_T = \vec{r}$  ; ce qui revient à considérer que **la lune décrit dans le repère géocentrique un mouvement elliptique dont  $O_T$  est un foyer.**

Pour illustrer ces propos, les deux schémas ci-dessous reproduisent les mouvement elliptiques dans le repère barycentrique du point fictif M et des centres  $O_L$  et  $O_T$ . Sur le premier schéma, ces points sont positionnés à une date quelconque, à un passage par les apogées (positions 1) et à un passage par les périgées (positions 2) pour des masses telles que  $m_T = 5m_L$ . Les excentricités sont fortement exagérées pour une meilleure clarté. Sur le second schéma, les masses sont choisies telles que  $m_T = 25m_L$ . Par rapport à la situation précédente, les trajectoires de M et de  $O_L$  se sont fortement rapprochées et les point G et  $O_L$  restent toujours très proches. La situation réelle :  $m_T = 81m_L$ , n'est pas représentée :



compte tenu de l'épaisseur des traits, les trajectoires de M et de  $O_L$  apparaîtraient superposées et les points G et  $O_T$  paraîtraient confondus...

*Remarque : l'échelle choisie pour les deux schémas est arbitraire et sans signification particulière.*



Voici pour mieux visualiser, une animation au format .avi des mouvements simultanées du point M (en noir), du centre  $O_L$  de l'astre le plus léger (en rouge) et du centre  $O_T$  de l'astre le plus lourd (en bleu). Pour plus de clarté, le rapport des deux masses est choisi égal à quatre.

[Animation mouvement de deux corps](#)

[Retour table des matières ↑](#)

[Retour à la page d'accueil](#)