

Choc de deux boules de billard

Résumé

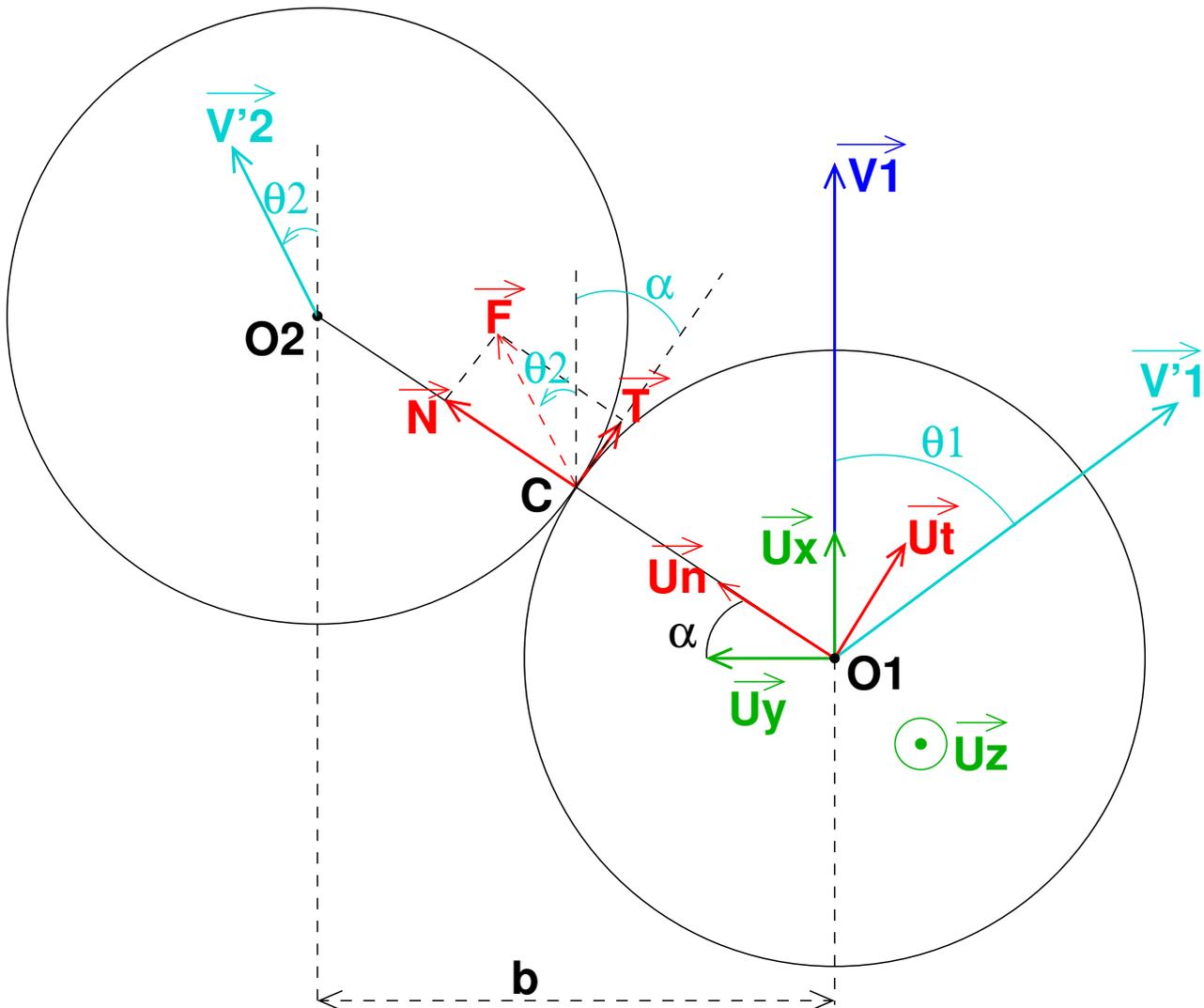
Il s'agit de modéliser le choc de deux billes de billard identiques en s'intéressant en particulier aux directions des vitesses des deux boules juste après le choc. La théorie simplifiée habituellement présentée, reposant sur la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie cinétique, conduit à deux situations :

- * soit le choc est frontal : la boule incidente s'immobilise et l'autre boule acquiert la vitesse de la boule incidente ;
- * soit le choc n'est pas frontal : les deux boules s'éloignent l'une de l'autre de sorte que leurs centres possèdent deux vecteurs vitesse orthogonaux.

L'expérience ne vérifie pas cette théorie : l'angle entre les deux vecteurs vitesses dépend du paramètre d'impact et est toujours inférieur à 90° . Il va s'agir ici, très modestement, de chercher à améliorer la théorie sans pour autant prétendre faire le tour d'un problème très complexe.

Présentation du problème

Les deux boules de billard sont identiques, de masse m , de rayon R , de centres respectifs O_1 et O_2 . Leurs mouvements sont étudiés par rapport à la table de billard considérée comme un référentiel galiléen. Les deux boules sont homogènes : le moment d'inertie d'une boule par rapport à un de ses diamètres est donc : $J = \frac{2}{5}m.R^2$.



La boule n° 2 est initialement immobile ; la boule n°1 est initialement animée d'un mouvement de roulement sans glissement : la vitesse de son centre O_1 est $\vec{V}_1 = V_1 \cdot \vec{U}_x$. Le paramètre d'impact b est précisé sur le schéma. On peut remarquer : $\cos(\alpha) = \frac{b}{2R}$ avec $0 \leq b < 2R$. Avant le choc, le vecteur rotation propre de la bille n° 1 est, en supposant le roulement sans glissement :

$$\vec{\Omega}_1 = \frac{V_1}{R} \cdot \vec{U}_y \quad (1)$$

À l'instant de date $t = 0$ du choc en C, la vitesse de C considéré comme appartenant à la boule n° 1 est :

$$\vec{V}_C = \vec{V}_1 + \vec{\Omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1C} = V_1 \cdot \vec{U}_x + V_1 \cdot \vec{U}_y \wedge \vec{U}_n \quad (2)$$

$$\vec{U}_x = \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t + \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_n \quad ; \quad \vec{U}_y = -\sin(\alpha) \cdot \vec{U}_t + \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_n \quad (3)$$

$$\vec{V}_C = V_1 \cdot \left[\cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t + \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_n - \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_z \right] \quad (4)$$

Le point C, considéré comme appartenant à la bille n°2 étant immobile, la vitesse de glissement en C de la boule n°1 par rapport à la boule n° 2 à la date $t = 0$ est la somme des deux composantes tangentielles de la vitesse qui vient d'être calculée :

$$\vec{V}_g = V_1 \cdot \left[\cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t - \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_z \right] \quad (5)$$

Étude dynamique de la boule n° 2

Pour étudier la collision, on considère qu'entre les instants très rapprochés de dates $t=0$ et $t = \Delta t$, la boule n°1 exerce sur la boule n°2 une force de contact en C qui admet les composantes suivantes :

1° : une composante normale : $\vec{N} = N \cdot \vec{U}_n$;

2° : une composante tangentielle ayant la direction et le sens du vecteur vitesse de glissement précédent :

$$\vec{T}_1 = T_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t - T_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot \vec{U}_z \quad (6)$$

La composante horizontale de cette force : $\vec{T} = T_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{U}_t$ est représenté sur le schéma. La composante verticale n'est pas schématisée, elle est compensée par la réaction verticale du tapis. Les actions du tapis sur la boule n° 2 peuvent se décomposer ainsi :

1° : une réaction normale ascendante : $\vec{R}_s = R_s \cdot \vec{U}_z$;

2° : une réaction tangentielle de frottement qui permet à la boule de rouler sans glisser

3° : pendant la durée Δt , il faut aussi imaginer un couple de frottement de moment vertical qui compense le moment non nul de la force \vec{T} de façon que, après la collision, le centre O2 soit animé d'un mouvement rectiligne horizontal de vitesse \vec{V}'_2 , la boule roulant sans glisser sur le tapis.

Dans ces conditions, seules les composantes horizontales des forces exercées pendant le choc interviennent dans la détermination de \vec{V}'_2 .

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la boule n° 2, intégrée entre les instants très rapprochés de dates $t=0$ et $t = \Delta t$ conduit à :

$$m \cdot \vec{V}'_2 = \left(\vec{N} + \vec{T} \right) \cdot \Delta t = \vec{F} \cdot \Delta t \quad (7)$$

Ainsi : **la direction du vecteur vitesse de O2 est la direction du vecteur \vec{F} .**

Si on note f le coefficient de frottement dynamique entre les deux boules, la loi de Coulomb conduit à :

$$T_1 = f \cdot N \quad \text{soit} \quad T = f \cdot N \cdot \cos(\alpha) \quad (8)$$

La relation vectorielle : $\vec{F} = \vec{N} + \vec{T}$ conduit simplement à :

$$\frac{N}{T} = \tan(\alpha + \theta_2) = \frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\theta_2)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\theta_2)} \quad \text{avec} \quad \frac{N}{T} = \frac{1}{f \cdot \cos(\alpha)} \quad (9)$$

Après simplification :

$$\boxed{\tan(\theta_2) = \frac{1}{f \cdot \sin(\alpha) + \tan(\alpha)}} \quad (10)$$

Remarque : l'absence de frottement ($f=0$) conduit à $\alpha + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$: le vecteur \vec{V}'_2 est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Étude dynamique de la boule n° 1

Comme pour la boule n° 2, nous faisons l'hypothèse que les actions du sol pendant la durée Δt se limitent à compenser les composantes verticales des forces de contact et à assurer la mise en roulement sans glissement de la boule n° 1, le centre O1 étant animé d'un mouvement rectiligne à la vitesse \vec{V}'_1 . En tenant compte du principe des actions réciproques, nous pouvons intégrer la relation fondamentale de la dynamique entre les instants très rapprochés de dates $t=0$ et $t = \Delta t$:

$$m \cdot \vec{V}'_1 - m \cdot \vec{V}_1 = - \left(\vec{N} + \vec{T} \right) \cdot \Delta t = - \vec{F} \cdot \Delta t \quad (11)$$

En tenant compte de (7), on obtient :

$$m.\vec{V}'_1 - m.\vec{V}_1 = -m.\vec{V}'_2 \quad \text{soit} \quad \vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}'_2 \quad (12)$$

Remarque : cette relation traduit la conservation de la quantité de mouvement du système formé des deux boules.

En projetant cette relation vectorielle dans la base (\vec{U}_x, \vec{U}_y) , on obtient :

$$\begin{cases} V'_1 \cdot \cos(\theta_1) = V_1 - V'_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ V'_1 \cdot \sin(\theta_1) = V'_2 \cdot \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (13)$$

Influence du coefficient de restitution : règle des collisions de Newton

Imaginons une bille abandonnée sans vitesse initiale à une hauteur h d'une plaque horizontale en marbre. Les mesures des différentes hauteurs atteintes après les rebonds successifs montre qu'à chaque choc de la bille sur la plaque, la vitesse de la bille change de sens, la norme du vecteur vitesse étant multipliée par un réel e inférieur à 1, appelé coefficient de restitution. Le cas limite $e = 1$ correspondrait à un choc parfaitement élastique. Newton a généralisé ce résultat aux collisions entre boules de la façon suivante : la collision inverse le sens de la vitesse relative radiale d'une boule par rapport à l'autre, la norme de cette vitesse relative radiale étant multiplié par e . Par vitesse radiale, il faut comprendre : projeté du vecteur vitesse relative sur un axe passant par la ligne des centre. En appliquant cette relation à la vitesse relative de la bille 2 par rapport à la bille 1, cela donne :

$$(\vec{V}'_2 - \vec{V}'_1) \cdot \vec{U}_n = -e \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \cdot \vec{U}_n = e \cdot \vec{V}_1 \cdot \vec{U}_n$$

Soit :

$$V'_2 \cdot \sin(\alpha + \theta_2) + V'_1 \cdot \sin(\theta_1 - \alpha) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha) \quad (14)$$

Résultats

La valeur du coefficient de frottement entre les deux boules varie d'une marque à l'autre mais ne dépasse jamais 0,03. Afin de savoir s'il était possible de simplifier les relations précédentes en posant $f = 0$, j'ai calculé la valeur de θ_2 fournie par la relation (10) en posant $f = 0,03$ et je l'ai comparée à la valeur simplifiée : $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$. L'écart relatif dépend de la valeur de α mais reste toujours inférieur à 1,3%. Par la suite, je vais donc poser :

$$\boxed{f = 0 \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha} \quad (15)$$

Dans ces conditions, les relations (13) et (14) se simplifient :

$$\begin{cases} V'_1 \cdot \cos(\theta_1) = V_1 - V'_2 \cdot \sin(\alpha) \\ V'_1 \cdot \sin(\theta_1) = V'_2 \cdot \cos(\alpha) \\ V'_2 + V'_1 \cdot \sin(\theta_1 - \alpha) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \quad (16)$$

En développant le sinus de la troisième équation puis en tenant compte des deux premières équations :

$$V'_2 + V'_1 \cdot (\sin(\theta_1) \cdot \cos(\alpha) - \cos(\theta_1) \cdot \sin(\alpha)) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha)$$

$$V'_2 \cdot [1 + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)] - V_1 \cdot \sin(\alpha) = e \cdot V_1 \cdot \sin(\alpha)$$

D'où :

$$\boxed{V'_2 = V_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1+e}{2}} \quad (17)$$

En effectuant la « division membre à membre » des deux premières relations (16) puis en tenant compte de (17) :

$$\tan(\theta_1) = \frac{V'_2 \cdot \cos(\alpha)}{V_1 - V'_2 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{1+e}{2}}{1 - \sin^2(\alpha) \cdot \frac{1+e}{2}}$$

$$\boxed{\tan(\theta_1) = \frac{\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{\frac{2}{1+e} - \sin^2(\alpha)}} \quad (18)$$

Connaissant la valeur de V'_2 et la valeur de θ_1 , il est facile d'obtenir numériquement la valeur de V'_1 . En revanche, son expression littérale est assez laborieuse à obtenir.

Remarque : le cas particulier $e = 1$ correspond au choc élastique ; la relation (18) conduit dans ce cas à $\theta_1 = \alpha$ et, en tenant compte de (15), à $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. On obtient bien les résultats classiques : le vecteur \vec{V}'_2 est colinéaire à la ligne des centres (O_1O_2) et les vecteurs \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 sont orthogonaux.

Il peut s'avérer également prudent également de tester les résultats précédents dans le cas d'un choc frontal non élastique. Pour un tel choc : $\alpha = \frac{\pi}{2} rad$. Cela conduit (heureusement !) à $\theta_2 = 0$. La relation (17) conduit à :

$$V_2' = V_1 \left(\frac{1+e}{2} \right)$$

Les relations (16), combinées à la relation précédente, conduisent à :

$$\begin{cases} V_1' \cdot \cos(\theta_1) = V_1 - V_2' = V_1 \cdot \frac{1-e}{2} \\ V_1' \cdot \sin(\theta_1) = 0 \end{cases}$$

Cela conduit à :

$$\theta_1 = 0 \quad ; \quad V_1' = V_1 \cdot \frac{1-e}{2}$$

Le centre O1 de la boule n°1 garde une vitesse ayant même direction et même sens que sa vitesse avant le choc mais cette vitesse est très faible.

On peut aussi se poser la question de la conservation ou non de l'énergie cinétique lors du choc. En supposant qu'avant et après le choc, les mouvements correspondent à des roulements sans glissement, La variation d'énergie cinétique au cours du choc est :

$$\Delta E_c = \frac{7}{10} m \cdot R^2 \cdot (V_1'^2 + V_2'^2 - V_1^2) \quad (19)$$

La variation relative est ainsi ;

$$\begin{aligned} \Delta E_{cR} &= \frac{\Delta E_c}{0,7 \cdot m \cdot R^2} = \frac{V_1'^2 + V_2'^2}{V_1^2} - 1 \\ \Delta E_{cR} &= \left(\frac{1+e}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-e}{2} \right)^2 - 1 = \frac{e^2 - 1}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

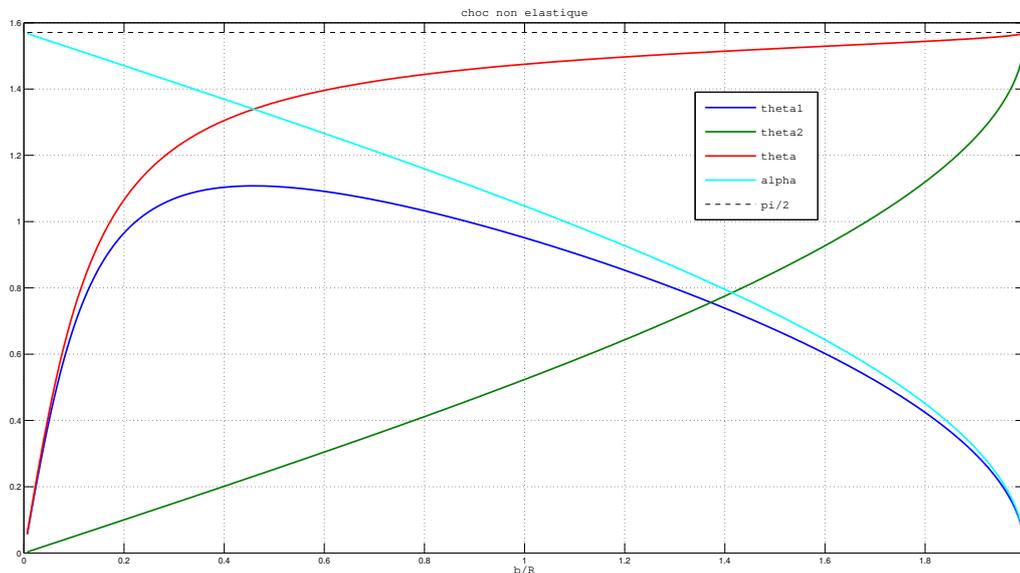
Puisque $e < 1$, $\Delta E_{cR} < 0$: **le choc non élastique s'effectue avec perte d'énergie cinétique.**

Influence de e sur l'angle entre les deux vecteurs vitesses après le choc. La valeur couramment admise est $e = \frac{8}{9}$. Pour cette valeur, je m'intéresse à l'évolution de θ_1 , θ_2 , $\theta_1 + \theta_2$ en fonction de $\frac{b}{R}$, ce rapport étant susceptible de varier entre zéro et deux. Voici les courbes obtenues. La ligne horizontale en pointillés a pour ordonnée $\frac{\pi}{2} rad$. Quelques remarques :

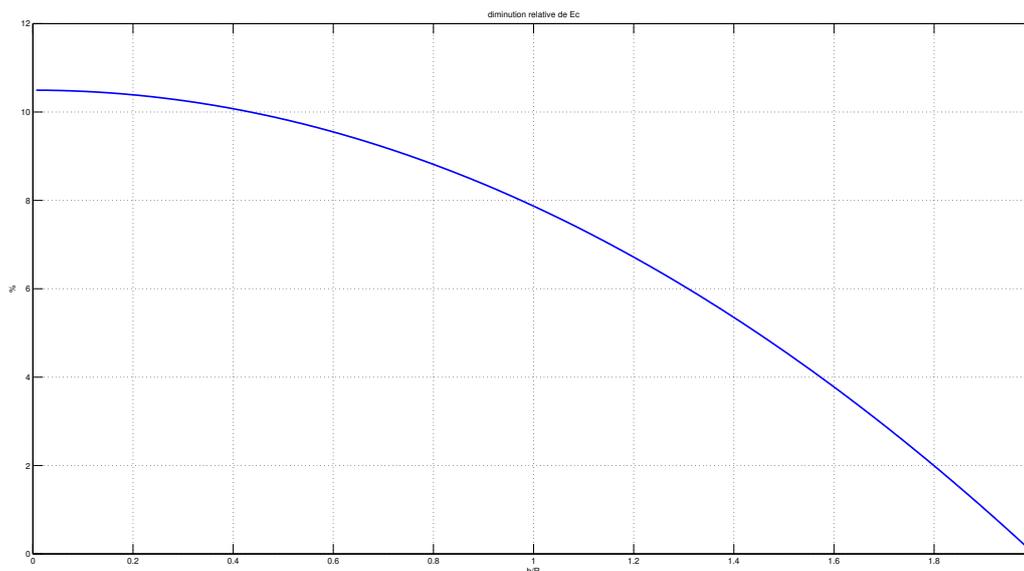
1° : le cas limite du choc élastique fait intervenir une discontinuité de θ_1 en $b = 0$ puisque $\theta_1 = 0$ pour le choc frontal et $\theta_1 = \alpha = \frac{\pi}{2} rad$ dès que le choc n'est plus frontal en $b = 0^+$; cette anomalie disparaît dans ce modèle plus réaliste d'un coefficient de restitution un peu inférieur à 1.

2° : si la valeur de θ_2 est sensiblement la même que dans le cas idéal du choc élastique, la valeur de θ_1 est toujours sensiblement inférieure à celle obtenue dans le cas du choc élastique ($\theta_1 = \alpha$) de sorte que l'angle entre les deux vecteurs vitesse après le choc reste toujours nettement inférieur à 90° .

3° : c'est aux faibles valeurs de b que l'écart de comportement par rapport au cas du choc élastique est le plus important, cet écart devenant faible quand b se rapproche de sa valeur maximale $2R$.



Perte d'énergie cinétique au cours du choc La variation relative d'énergie cinétique au cours du choc a été définie par la formule (20) : la courbe représentant (en pourcentage) la diminution relative d'énergie cinétique ($-\Delta E_{cR}$) en fonction de (b/R) . Il y a toujours diminution d'énergie cinétique. Là encore, l'écart le plus important avec le résultat obtenu pour un choc élastique correspond aux très faibles valeurs de b (diminution de 10,5% pour un choc frontal).



Validité du modèle ?

Les actions exercées par le tapis sur chaque boule n'ont pas été prises explicitement en compte. On suppose simplement que leurs rôles se cantonnent à compenser le poids et les composantes verticales de l'action de l'autre boule. De plus, la composante horizontale tangentielle \vec{T} est très faible mais pas tout à fait nulle. Cette force tend à produire une composante verticale non nulle du vecteur rotation instantané de chaque boule. On peut penser que le moment de cette force \vec{T} est, pendant la durée Δt d'intégration de la relation fondamentale de la dynamique, compensé par un couple de frottement exercé par le tapis. S'il n'en est pas ainsi, cette rotation propre engendre un mouvement curviligne du centre de chaque boule après le choc.

De plus, on suppose que la boule n° 1 roule sans glisser sur le tapis. Cela n'est vrai que si la queue de billard frappe la bille n° 1 de façon pas trop violente et assez loin de la position du choc.

[retour à la page principale](#)