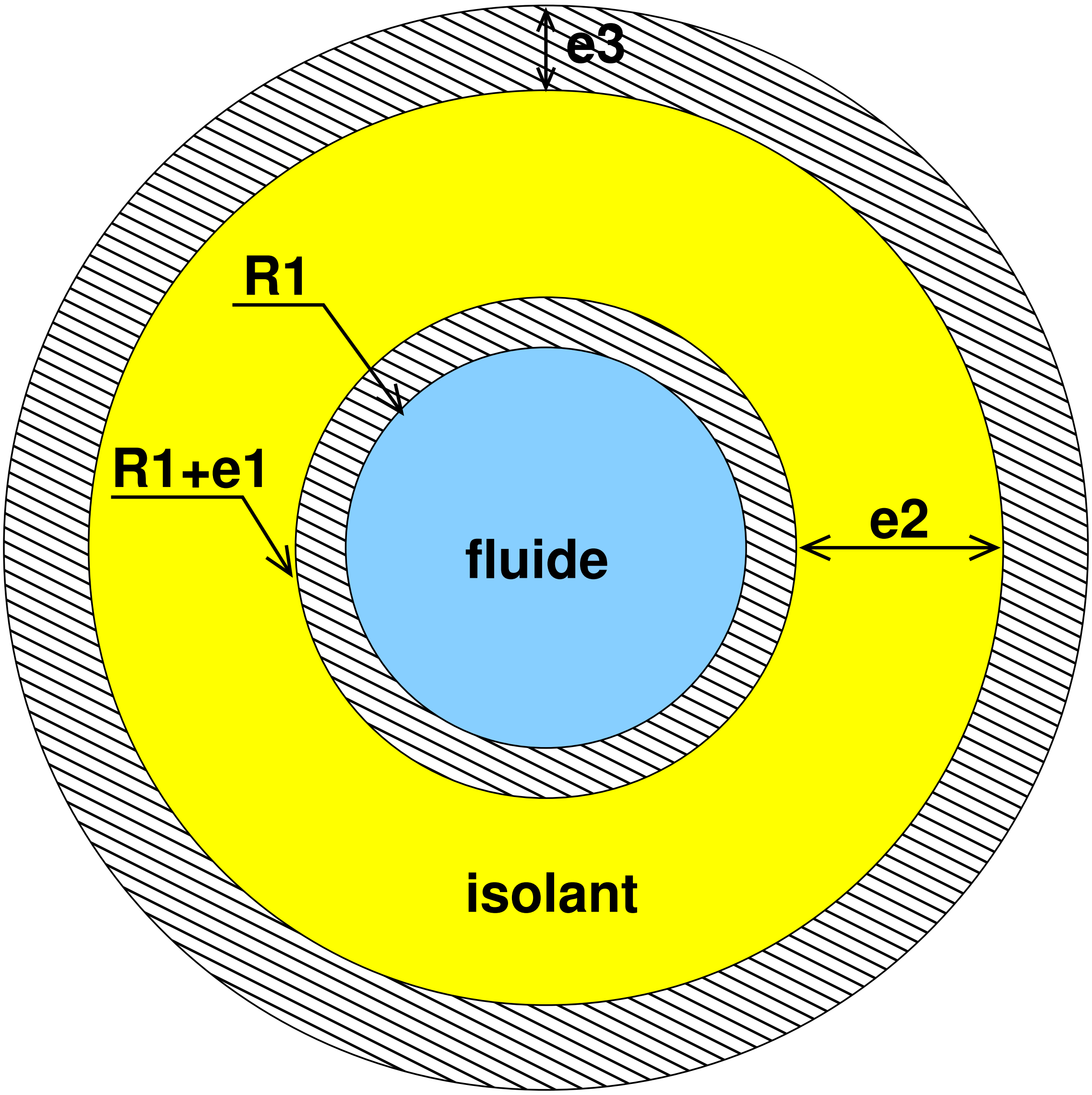
Chute de température le long d'une canalisation parcourue par un liquide chaud.

Résumé

Il s'agit d'étudier la chute de température d'un fluide chaud circulant à vitesse constante dans une canalisation cylindrique calorifugée et enterrée de sorte que l'on puissance considérer la température extérieure fixe. L'évolution de la température en fonction de la distance parcourue dans la canalisation est étudiée pour aboutir à une expression de la diminution de température entre l'entrée et la sortie. L'expression de la conductance thermique de la canalisation est démontrée.

Résistance thermique de la canalisation.

La canalisation est assimilée à un tuyau cylindrique de longueur L, en acier, de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur (R_1+e_1) entourée d'une gaine isolante d'épaisseur e_2 et d'une gaine protectrice en acier d'épaisseur e_3. On note λ_a et λ_i les conductivités thermiques respectives de l'acier et de l'isolant. Un fluide chaud y circule à la vitesse constante V.



Pour la démonstration, on s'intéresse à la variation de la température en fonction de r, distance à l'axe de symétrie de la canalisation.On suppose pour l'instant la température identique le long de la canalisation, pour une valeur donnée de r. On se place en régime permanent : la température ne dépend que de r. La température du fluide est uniforme de valeur T_f, la température extérieure est uniforme de valeur T_e. La puissance thermique transmise par conduction du fluide au milieu extérieur à pour expression générale :

$$P_{th} = G_{th}.(T_f - T_e) \quad ou \quad T_f - T_e = R_{th}.P_{th}$$

Rth est la résistance thermique de la canalisation ; $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$ est sa conductance thermique.

La puissance thermique traversant un cylindre quelconque de rayon r à l'intérieur de la canalisation est nécessairement P_{th}. Si cette puissance thermique dépendait de r, la température de la canalisation dépendrait nécessairement du temps, ce qui est exclu en régime permanent. Cette puissance est le flux d'un vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_{th}}$ dont l'expression est fournie par la loi de Fourier :

$$\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}(T)$$

avec λ : conductivité thermique du conducteur. Ce vecteur est radial, sa norme vaut :

$$j_{th} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \quad ; \quad \left(\text{attention ! Ici : } \frac{dT}{dr} < 0\right)$$

Son flux à travers un cylindre de longueur L et de rayon r s'écrit :

$$P_{th} = j_{th}.2\pi.r.L = -2\pi.\lambda.L.r.\frac{dT}{dr}$$

À une augmentation élémentaire dr de r, correspond une variation élémentaire dT de température telle que :

$$dT = -\frac{P_{th}}{2\pi.\lambda.L} \cdot \frac{dr}{r}$$

Si on intègre cette relation de T_f à T_e et donc de $r = R_1$ à $r = R_1 + e_1 + e_2 + e_3$, on obtient :

$$T_e - T_f = -\frac{P_{th}}{2\pi.L}\left[\frac{1}{\lambda_a}\int_{R_1}^{R_1+e_1}\frac{dr}{r} + \frac{1}{\lambda_i}\int_{R_1+e_1}^{R_1+e_1+e_2}\frac{dr}{r} + \frac{1}{\lambda_a}\int_{R_1+e_1+e_2}^{R_1+e_1+e_2+e_3}\frac{dr}{r}\right]$$

Puisque le résistance thermique de la canalisation est définie par :

$$R_{th} = \frac{T_f - T_e}{P_{th}}$$

On obtient :

$$\boxed{R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1}{R_1}\right)}{2\pi \cdot \lambda_a \cdot L} + \frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1+e_2}{R_1+e_1}\right)}{2\pi \cdot \lambda_i \cdot L} + \frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1+e_2+e_3}{R_1+e_1+e_2}\right)}{2\pi \cdot \lambda_a \cdot L}}$$

D'où la conductance thermique par unité de longueur de la canalisation :

$$\boxed{g_{th} = \frac{1}{L.R_{th}} = 2\pi \cdot \left[\frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1}{R_1}\right)}{\lambda_a} + \frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1+e_2}{R_1+e_1}\right)}{\lambda_i} + \frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1+e_2+e_3}{R_1+e_1+e_2}\right)}{\lambda_a}\right]^{-1}}$$

Conservation de l'énergie thermique

L'eau pénètre dans la canalisation en x = 0 à une température $T_{(0)}$nettement plus élevée que la température extérieure T_e considérée comme uniforme et fixe le long de la canalisation. J'imagine une tranche de canalisation située entre les sections droites d'abscisses x et (x+dx). Je note D_m le débit massique du liquide dans la canalisation et c sa capacité thermique massique (si le fluide est un gaz il faut préciser : capacité thermique massique isobare).

L'énergie thermique (on pourrait aussi dire l'enthalpie ici) entrant en x entre les instants de dates t et t+dt est égale au produit de la masse entrante (Dm.dt) par l'enthalpie massique du fluide entrant :

$$D_m.c.T_{(x)}.dt$$

Cette énergie entrante peut s'écrire comme la somme de deux termes :

1° : L'énergie thermique sortant en (x+dx) entre les instants de dates t et (t+dt) ; elle a pour expression (raisonnement analogue) :

$$D_m.c.T_{(x+dx)}.dt$$

2° : l'énergie thermique perdue par conduction vers le milieu extérieur ; c'est à dire l'énergie traversant par conduction thermique le tronçon de canalisation de longueur dx. Si je note Te la température extérieure supposée fixe tout le long de la canalisation, cette énergie perdue est le produit de la puissance thermique à travers la canalisation par la durée ; la conductance du tronçon de canalisation de longueur dx étant g_{th}.dx, cette énergie thermique perdue a pour expression :

$$g_{th}.dx.\left(T_{(x)} - T_e\right).dt$$

Remarque : si le régime n'était pas permanent, il faudrait tenir compte de l'énergie absorbée ou cédée par la tranche de fluide pour faire varier sa température en fonction du temps...

La conservation de l'énergie thermique se traduit ainsi par l'égalité :

$$D_m.c.T_{(x)}.dt = D_m.c.T_{(x+dx)}.dt + g_{th}.dx.\left(T_{(x)} - T_e\right).dt$$

La variation élémentaire de température est assimilable mathématiquement à une différentielle :

$$T_{x+dx)} - T_{(x)} = \frac{dT_{(x)}}{dx} \cdot dx$$

Les simplifications conduisent à :

$$\boxed{D_m \cdot c \cdot \frac{dT_{(x)}}{dx} + g_{th} \cdot T_{(x)} = g_{th} \cdot T_e}$$

Équation différentielle du premier ordre très classique... Évidemment, je suis resté dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire : la température de l'eau dépend de x mais pas du temps. J'ai aussi supposé que la température du fluide est la même en tous points d'une même section droite. C'est une approximation qui me semble assez bonne dans le cas d'un écoulement.

L'expression du débit massique s'exprimer en fonction de la vitesse d'écoulement V du fluide, de l'aire S de la section droite interne de la canalisation et de la masse volumique du fluide par :

$$D_m = \rho.S.V = \rho.\pi.R_1^2.V$$

En notant : $\delta = \frac{D_m.c}{g_{th}}$, l'équation différentielle précédente peut s'écrire :

$$\frac{dT_{(x)}}{dx} + \frac{T_{(x)}}{\delta} = \frac{T_e}{\delta}$$

La solution générale est de la forme :

$$T_{(x)} = A.e^{-\frac{x}{\delta}} + T_e$$

En notant $T_{(0)}$ la température d'entrée dans la canalisation, on obtient finalement :

$$\boxed{T_{(x)} = \left(T_{(0)} - T_e\right) \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} + T_e}$$

La température diminue ainsi exponentiellement en fonction de la distance parcourue par le fluide dans la canalisation.

La température de sortie de la canalisation est ainsi :

$$T_{(L)} = \left(T_{(0)} - T_e\right) \cdot e^{-\frac{L}{\delta}} + T_e$$

D'où l'expression du refroidissement du fluide provoquée par la traversée de la canalisation :

$$\boxed{T_{(0)} - T_{(L)} = \left(T_{(0)} - T_e\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{L}{\delta}}\right)}$$

Voici un exemple d'application numérique :

$$L = 500m\ ;\ T_{(0)} = 90°\text{C}\ ;\ T_e = 13°\text{C}\ ;\ \lambda_a = 26W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}\ ;\ \lambda_i = 35.10^{-3}W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$$

$$R_1 = 10cm\ ;\ e_1 = 0,5cm\ ;\ e_2 = 5,0cm\ ;\ e_3 = 3,0cm\ ;\ V = 1,0m/s\ ;\ c = 4,18.10^3 J.K^{-1}.kg^{-1}$$

$\rho = 10^3 kg.m^{-3}$

Le débit massique du liquide vaut :

$$D_m = \rho.\pi.R_1^2.V = 10^3.\pi.10^{-2}.1 \approx 31,4kg/s$$

La conductance linéique vaut :

$$g_{th} = 2\pi \cdot \left[\frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1}{R_1}\right)}{\lambda_a} + \frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1+e_2}{R_1+e_1}\right)}{\lambda_i} + \frac{\ln\left(\frac{R_1+e_1+e_2+e_3}{R_1+e_1+e_2}\right)}{\lambda_a}\right]^{-1} = \frac{2\pi}{\frac{\ln\left(\frac{10,5}{10}\right)}{26} + \left(\frac{\ln\left(\frac{15,5}{10,5}\right)}{0,035}\right) + \left(\frac{\ln\left(\frac{18,5}{15,5}\right)}{26}\right)} \approx 0,564W.K^{-1}.m^{-1}$$

La distance caractéristique est ainsi :

$$\delta = \frac{D_m.c}{g_{th}} = \frac{31,4 \cdot 4,18.10^3}{0,564} \approx 2,33.10^5 m$$

La longueur de la canalisation L est près de 500 fois inférieure à la distance caractéristique. La chute de température du fluide provoquée par la traversée de la canalisation est donc très faible :

$$T_{(0)} - T_{(L)} = \left(T_{(0)} - T_e\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{L}{\delta}}\right) = 77 \cdot \left(1 - e^{-\frac{500}{2,33.10^5}}\right) \approx 0,165°\mathrm{C}$$

Étude de quelques cas particuliers

Canalisation très mal isolée thermiquement.

On peut imaginer d'abord une canalisation suffisamment mal isolée thermiquement et suffisamment longue de sorte que $L > 5\delta$. Par analogie avec l'étude de la décharge exponentielle d'un condensateur à travers une résistance où on considère le condensateur déchargé au bout d'une durée de l'ordre de 5 fois la constante de temps, on peut considérer que le fluide atteind la température extérieure après un parcours d'environ 5δ . On obtient donc :

$$\boxed{T_{(L)} \approx T_e}$$

Canalisation très bien isolée thermiquement.

Il faut imaginer la canalisation suffisamment bien isolée et pas trop longue pour que l'on ait : $L \ll \delta$. Il est alors possible d'effectuer un développement de l'exponentielle limité au deuxième ordre en $\frac{L}{\delta}$:

$$e^{-\frac{L}{\delta}} \approx 1 - \frac{L}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 = 1 - \frac{L.g_{th}}{D_m.c} + \frac{1}{2}\left(\frac{L.g_{th}}{D_m.c}\right)^2 = 1 - \frac{G_{th}}{D_m.c} + \frac{1}{2}\left(\frac{G_{th}}{D_m.c}\right)^2$$

où Gth désigne la conductivité de la canalisation de longueur L. En se limitant au premier ordre du développement limité, on commet une erreur par défaut sur l'exponentielle donc une erreur par excès sur le refroidissement. Le refroidissement est donc un peu inférieur à la valeur approchée suivante :

$$\boxed{T_{(0)} - T_{(L)} \approx \left(T_{(0)} - T_e\right) \cdot \frac{G_{th}}{D_m.c}}$$

Remarque : Cette expression approchée peut être obtenue directement, sans faire le raisonnement complet, en appliquant le principe de conservation de l'énergie non pas à une tranche élémentaire de canalisation mais à la canalisation complète.

L'énergie thermique entrante dans la canalisation en x = 0 entre les instants de dates t et (t+dt) s'écrit : $D_m.dt.c.T_{(0)}$. Cette énergie est la somme de deux termes :

1° : l'énergie sortante entre t et (t+dt) en x = L. Un raisonnement analogue conduit à une expression : $D_m.dt.c.T_{(L)}$.

2° : l'énergie perdue par conduction à travers la canalisation. C'est à ce niveau qu'intervient l'approximation : on suppose le refroidissement suffisamment faible pour que le calcul de la puissance Pth puisse se faire comme si le liquide restait à la température d'entrée :

$$P_{th} \approx G_{th}.\left(T_{(0)} - T_e\right)$$

ce qui conduit à une expression approchée de l'énergie perdue à travers la canalisation : $P_{th}.dt \approx G_{th}.\left(T_{(0)} - T_e\right).dt$. La conservation de l'énergie thermique conduit donc à l'expression approchée du refroidissement :

$$D_m.c.\left(T_{(0)} - T_{(L)}\right) \approx G_{th}.\left(T_{(0)} - T_e\right)$$

Soit :

$$\boxed{T_{(0)} - T_{(L)} \approx \left(T_{(0)} - T_e\right) \cdot \frac{G_{th}}{D_m.c}}$$

La puissance thermique perdue par unité de longueur diminue légèrement en fonction de x puisque la température de l'eau diminue légèrement en fonction de x. L'expression approchée de $\mathrm{P_{th}}$ obtenue est donc légèrement majorée. Il en est de même de l'expression approchée du refroidissement. On arrive heureusement au même résultat qu'en effectuant le développement limité.

Si le but de l'étude se limite, dans le cas d'un projet industriel plus complexe, à s'assurer que la chute de température est très faible, ce raisonnement simplifié peut suffire.

L'exemple numérique choisi précédemment relève de ce cas particulier puisque nous avions : $L \ll \delta$. La formule approchée de la diminution de température conduit à :

$$T_{(0)} - T_{(L)} \approx \left(T_{(0)} - T_e\right) \cdot \frac{G_{th}}{D_m.c} \approx 77 \cdot \frac{0,564 \cdot 500}{31,4 \cdot 4,18.10^3} \approx 0,165°\mathrm{C}$$

Au millième de degré près, la méthode simplifiée conduit à la même valeur du refroidissement. Un calcul plus précis montre que la méthode simplifiée conduit à un refroidissement seulement supérieur de $1,77.10^{-4}$°C au résultat obtenue par la méthode rigoureuse. Cet écart est évidemment totalement négligeable compte tenu de la précision sur les données numériques et compte tenu des approximations faites : température indépendante de r à l'intérieur du fluide en particulier...