Exemples de courbes tautochrones

Introduction

Une courbe est tautochrone si un objet assimilable à un point matériel qui décrit cette courbe sous l'effet de la gravité à partir d'une position initiale de vitesse nulle, atteint le point bas de cette courbe en une durée indépendante de la position initiale. On peut trouver une animation illustrant cette propriété ici : `http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./t/tautochrone.html`

Ces courbes ont été particulièrement étudiées par Huygens lorsqu'il cherchait à fabriquer un pendule isochrone, c'est à dire un pendule de période indépendante de l'amplitude des oscillations. Cette recherche était particulièrement importante pour l'obtention d'une horloge à balancier pouvant fonctionner sur un bateau. La masse m d'un pendule simple qui décrirait une courbe tautochrone serait nécessairement isochrone comme le montre l'animation suivante : `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_cyclo.php`

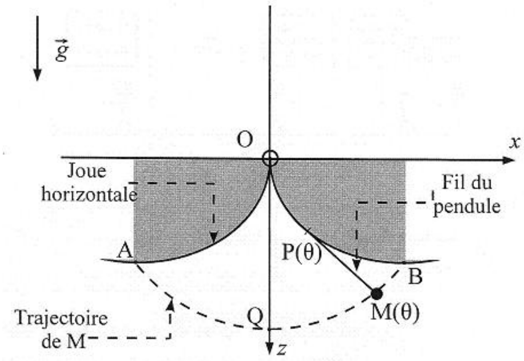


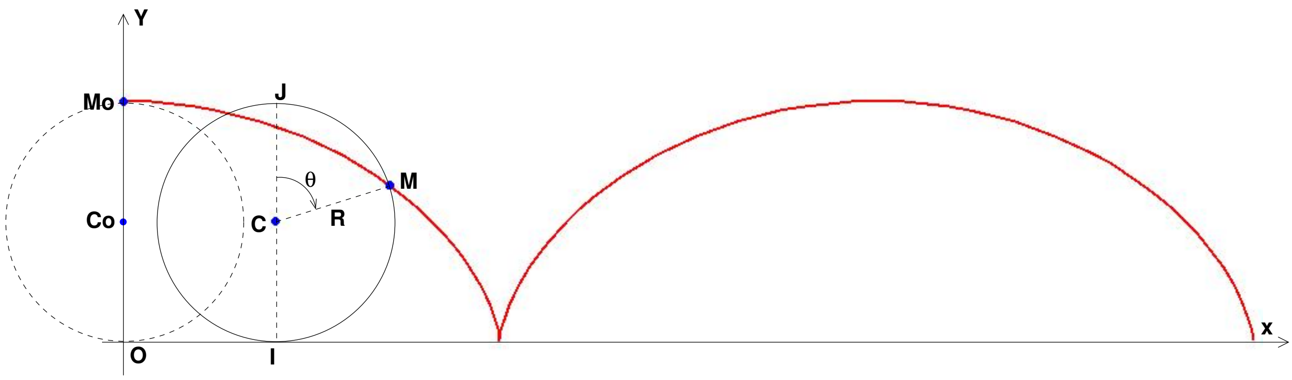
FIGURE 1 –

Huygens a résolu le problème en plaçant deux plaques de part et d'autre de son pendule de façon que la masse du pendule décrive une cycloïde inversée. Il a d'ailleurs ensuite contribué très fortement à l'obsolescence prématurée de son invention puisque, trois ans plus tard environ, il mettait au point le balancier circulaire avec ressort spiral totalement insensible au roulis et au tangage sur les bateaux !

Remarque : un « point matériel » ou « masse ponctuelle » : cela n'existe pas ! C'est un modèle physique applicable aux solides dont les dimensions sont négligeables devant les autres dimensions du problème et dont l'énergie cinétique de rotation propre est d'influence négligeable. Cette deuxième condition, souvent oubliée, est importante. Imaginons par exemple une boule homogène de masse m qui roule sans glisser sur un plan, le mouvement de son centre d'inertie G étant rectiligne ; aussi petit que puisse être le rayon de la boule, son énergie cinétique est toujours $\frac{7}{10} \cdot m \cdot V_G^2$*, pas* $\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_G^2$ *!*

Mouvement le long d'une cycloïde inversée

0.1 Équation paramétrée d'une cycloïde



La cycloïde peut être définie comme la trajectoire dans un plan vertical d'un point M à la périphérie d'une roue de rayon R qui roule sans glisser sur un plan horizontal perpendiculaire au plan de figure et contenant l'axe (O,X), le point M se déplace dans le plan vertical de figure (Mo,X,Y). Mo est la position du point M lorsque le centre C de la roue appartient à l'axe (Mo,Y), occupant la position Co. L'absence de glissement impose qu'à chaque instant, la distance parcourue horizontalement par C (distance CoC=OI=MoJ=x_C) reste égale à la longueur de l'arc JM : $arc(JM) = R \cdot \theta$. Les coordonnées du point M s'obtiennent alors très facilement :

$$x = x_C + R \cdot \sin(\theta) = R \cdot [\theta + \sin(\theta)]$$

$$y = y_C + R \cdot \cos(\theta) = R \cdot [1 + \cos(\theta)]$$

0.2 Équation paramétrée d'une cycloïde inversée

Pour inverser la cycloïde, on peut prendre son symétrique par rapport à l'axe (Ox), ce qui revient en remplacer y par (-y) à x donné. Pour obtenir y= 0 au « fond » de la cycloïde inversée, on décale aussi l'origine des ordonnées vers le bas de 2R. On obtient ainsi les coordonnées du point M :

$$x = R \cdot [\theta + \sin(\theta)]$$

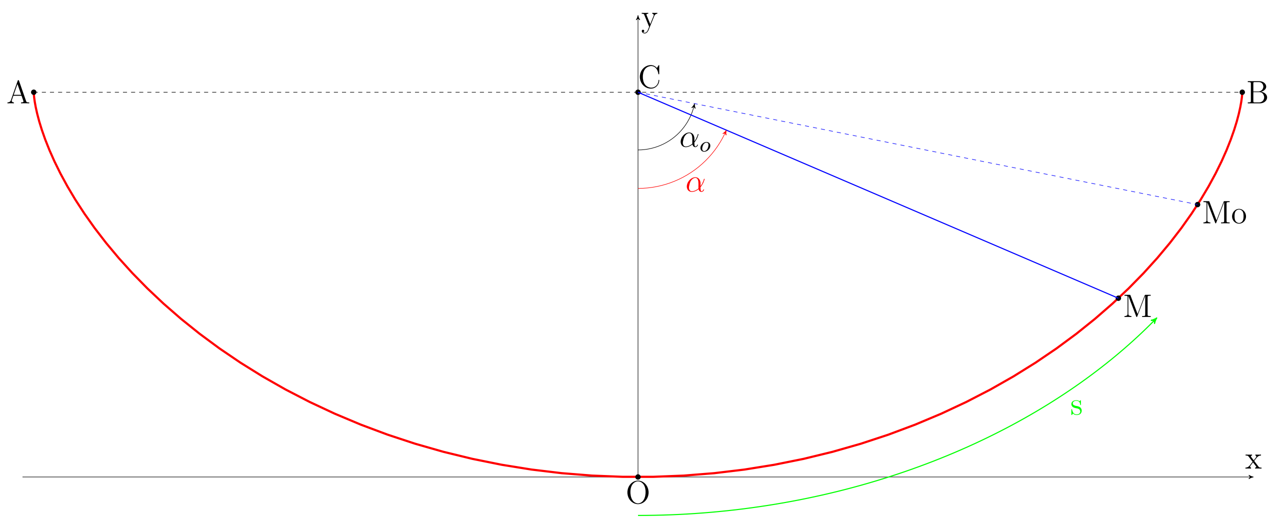
$$y = 2R - R \cdot [1 + \cos(\theta)] = R - R \cdot \cos(\theta)$$

0.3 Caractère tautochrone de la cycloïde renversée

On envisage maintenant une cuvette en forme de cycloïde inversée, définie, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, par son équation paramétrée :

$$\boxed{x = R \cdot \theta + R \cdot \sin(\theta) \quad ; \quad y = R - R \cdot \cos(\theta)}$$

Attention : θ est le paramètre de la cycloïde inversé, pas l'angle polaire caractérisant la position de M au cours du mouvement. Cet angle polaire est noté α sur la figure. Ainsi : $\theta = -\pi$ au point A ; $\theta = 0$ au point O ; $\theta = \pi$ au point B.



On imagine un solide assimilable à un point matériel M de masse m susceptible de glisser dans frottement dans cette cuvette dans le champ de pesanteur uniforme. Le repère d'étude, fixe par rapport à la cuvette, est supposé galiléen. La masse m est abandonnée sans vitesse initiale à partir d'une position Mo correspondant à une valeur θ_0 du paramètre de la cycloïde inversée. La cycloïde inversée pourra être qualifiée de « tautochrone » si la durée $\triangle T$ nécessaire au point M pour atteindre le fond 0 de la cuvette est indépendante de la position initiale Mo (Mo n'étant évidemment pas confondu avec le point O !).

Abscisse curviligne de M : On appelle « abscisse curviligne » de M la mesure algébrique de la distance, mesurée le long de la cycloïde, entre O et M ; s est positif si x>0, sinon : s⩽0.

Soit un déplacement élémentaire ds le long de la cycloïde lorsque θ augmente de $d\theta$. En notant dx et dy, les variations élémentaires de x et de y lors de ce mouvement, on peut écrire :

$$dx = R.d\theta.[1 + \cos(\theta)] \quad ; \quad dy = R.d\theta.\sin(\theta)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R.d\theta.\sqrt{[1 + \cos(\theta)]^2 + \sin^2(\theta)} = R.d\theta.\sqrt{2 + 2.\cos(\theta)}$$

Sachant que :

$$2 + 2.\cos(\theta) = 4.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On obtient :

$$\frac{ds}{d\theta} = 2R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Il est facile de vérifier que le passage du carré à la racine carrée ne pose pas ici de problème de signe. Par intégration :

$$s = 4R.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + constante$$

Par convention, l'origine des abscisses curviligne est au fond de la cycloïde inversée : $s = 0$ pour $\theta = 0$. La constante est donc nulle. Au final :

$$\boxed{s = 4R.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Équation différentielle vérifiée par l'abscisse curviligne s En négligeant les frottements, le solide est soumis à deux forces : son poids de vecteur $\overrightarrow{P}$ et la réaction normale de la cycloïde de vecteur $\overrightarrow{R_n}$. Cette dernière force ne travaille pas. Le poids dérivant d'une énergie potentielle, on peut considérer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement. L'énergie cinétique s'exprime directement en fonction de l'abscisse curviligne :

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

L'énergie potentielle a pour expression :

$$E_p = m.g.y = m.g.R \cdot [1 - \cos(\theta)]$$

Or :

$$1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{s^2}{8R^2}$$

$$E_p = \frac{m \cdot g}{8R} \cdot s^2$$

Énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m}{2} \cdot \left(\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{g}{4R} \cdot s^2\right)$$

L'énergie mécanique ne varie pas au cours du temps en absence de frottement :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0\ \forall t \quad ; \quad \left(\frac{ds}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4R} \cdot s\right) = 0\ \forall t$$

Au cours du mouvement, la vitesse n'est pas nulle à chaque instant ; l'équation différentielle vérifiée par s est donc :

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4R} \cdot s = 0}$$

Caractère tautochrone de la cycloïde inversée. L'équation différentielle précédente admet une solution générale de la forme :

$$s = S_{max} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4R}}$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, la situation initiale de date t = 0 correspond à :

$$s = s_0 = S_{max}.\cos(\varphi) \quad ; \quad \frac{ds}{dt} = 0 = -\omega.S_{max} \cdot \sin(\varphi)$$

D'où la solution :

$$\boxed{s = s_0 \cdot \cos(\omega_0.t)}$$

La durée $\triangle T$ nécessaire pour passer de la position initiale Mo au fond C de la cycloïde inversée est donc égale à un quart de période du mouvement sinusoïdal :

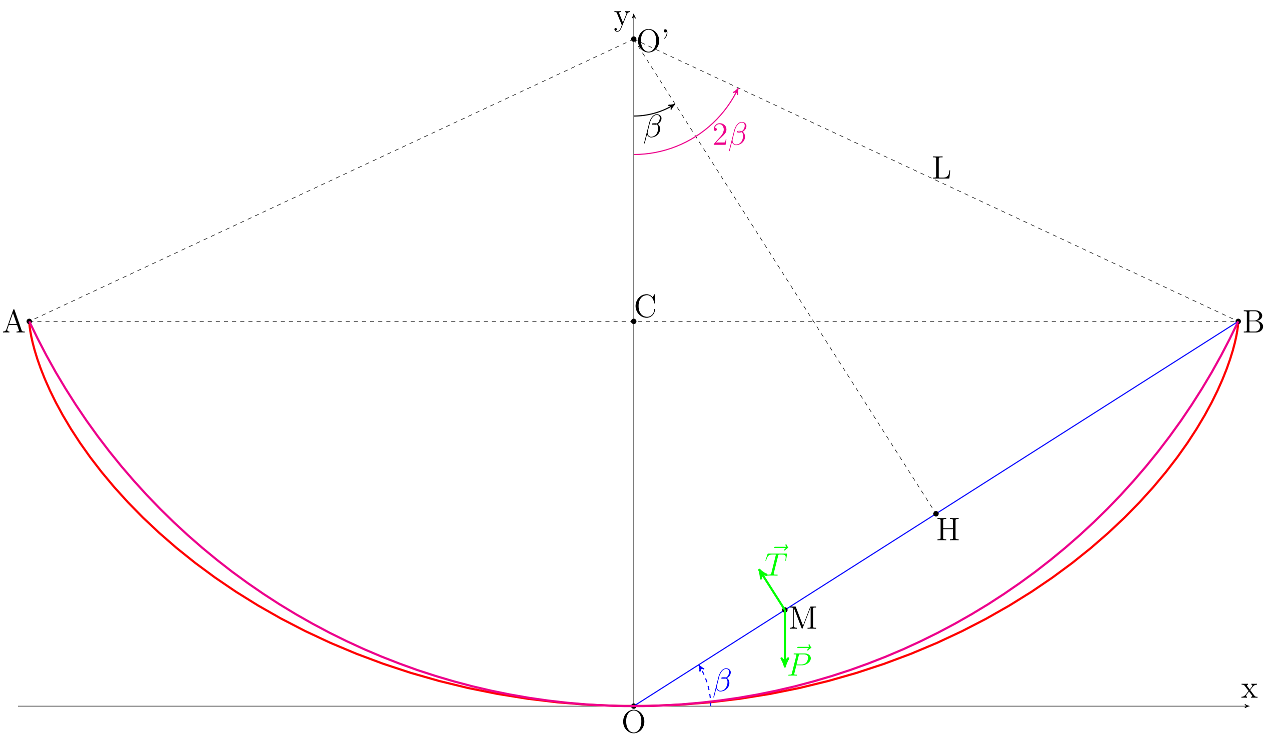
$$\boxed{\triangle T = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}}$$

Cette durée est indépendante de la valeur de s_o donc indépendante de la position initiale, à condition évidemment que la position initiale Mo ne soit pas le fond O de la cycloïde inversée. **Cela prouve le caractère tautochrone de la cycloïde inversée.**

Ce raisonnement justifie l'isochronisme du pendule de Huygens. Si, grâce aux joues profilées, la masse du pendule décrit une cycloïde inversée, la période du pendule est la valeur T_o précédente et elle est indépendante de l'amplitude des oscillations. Sur un bateau, cette amplitude peut varier en fonction du tangage et du roulis...

0.4 Caractère brachistochrone de la cycloïde inversée

Cette courbe présente une autre particularité : toujours sous l'action de son poids et en absence de frottement, cette trajectoire est celle qui correspond à une durée de parcours minimale de M_0 à O avec un départ sans vitesse initiale dans tous les cas. La démonstration générale est assez délicate. Nous allons nous limiter à une comparaison avec deux cas particuliers assez simples : le mouvement rectiligne sur un plan incliné lorsque le point M_0 est confondu avec le point B puis la trajectoire circulaire à partir du même point B. La distance à parcourir ainsi pour atteindre le point O est la plus importante le long de la cycloïde et pourtant : c'est le trajet dont la durée est la plus faible !



Il s'agit donc d'abord de déterminer le temps de parcours le long d'un plan inclinée entre B et O. L'étude dynamique est du niveau enseignement secondaire. En négligeant les frottements, l'accélération de M vaut :

$$a = g \cdot \sin(\beta)$$

avec :

$$\sin(\beta) = \frac{y_B}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{2R}{R \cdot \sqrt{\pi^2+4}} = \frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$$

La distance à parcourir est :

$$L' = \|\overrightarrow{BO}\| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = R \cdot \sqrt{\pi^2+4}$$

Le mouvement étant uniformément accéléré avec une vitesse initiale nulle en B, la durée t' du parcours vérifie :

$$L' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t'^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin(\beta) \cdot t'^2$$

$$t' = \sqrt{\frac{2L'}{g \cdot \sin(\beta)}} = \sqrt{\frac{R \cdot (\pi^2+4)}{g}}$$

La cycloïde inversée étant tautochrone, le trajet de B en O le long de la cycloïde inversée est de même durée que le trajet M_0O étudié précédemment : $\triangle T = \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$

On remarque : $\sqrt{\pi^2+4} > \pi$; on obtient bien : $t' > \Delta T$.

La pente le long de la cycloïde inversée, au moins au voisinage de B, est très supérieure à la pente du plan incliné. L'accélération de M est ainsi supérieure le long de la cycloïde inversée dans la première partie de celle-ci ; elle est ensuite inférieure mais, compte tenu de l'inertie, le trajet, bien que plus long, nécessite moins de temps.

Nous nous intéressons maintenant au temps de parcours le long d'une gouttière circulaire entre B et O. Le cercle (en brun clair sur le schéma) est tangent en O à l'axe horizontal (Ox). Le centre O' de la trajectoire appartient donc à l'axe (Oy). Le rayon L du cercle est :

$$L = O'O = O'B$$

Le centre O' appartient donc à la médiatrice du segment (OB). Dans le triangle isocèle (OO'B) cette médiatrice est aussi bissectrice : $\widehat{OO'H} = \widehat{HO'B}$.

Angles à côtés respectivement perpendiculaire : $\widehat{OO'H} = \widehat{xOB} = \beta$. Et ainsi : $\widehat{OO'B} = 2.\widehat{xOB} = 2\beta$. Donc :

$$L = \frac{OH}{\sin(\beta)} = \frac{\frac{L'}{2}}{\frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}} = \frac{R \cdot \sqrt{\pi^2+4}}{\frac{4}{\sqrt{\pi^2+4}}} = \frac{R}{4} \cdot \left(\pi^2+4\right)$$

En absence de frottement et en absence de vitesse initiale en B, la durée du trajet circulaire BO est donc le quart de la période d'oscillation d'un pendule simple de longueur L. On démontre dans l'enseignement secondaire que la période d'un pendule simple oscillant avec une amplitude faible (pas plus de 10°) est : $T_o = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$. La difficulté ici provient du fait que l'amplitude 2β est importante :

$$\tan(\beta) = \frac{y_B}{x_B} = \frac{2R}{\pi.R} = \frac{2}{\pi}$$

$$2\beta = 2\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 64,96°$$

L'étude détaillée de la période d'un pendule a été faite sur ce document, partie III.3 et en particulier le paragraphe III.3.2 :

`https://www.vanoise49.fr/annexe_6_balancier%20compense%20en%20temperature.pdf`

Je reprends le résultat sans refaire la démonstration :

$$T = \frac{\sqrt{2}.T_o}{\pi} \cdot \int_0^{2\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(2\beta)}}$$

D'où la durée du trajet circulaire BO :

$$t'' = \frac{T}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \int_0^{2\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(2\beta)}}$$

Soit encore :

$$t'' = \frac{\sqrt{2\left(\pi^2+4\right)}}{4} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_0^{2\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(2\beta)}}$$

Autre difficulté : ce calcul intégral n'admet pas de solution explicite ; il faut se contenter d'une solution numérique approchée obtenue à l'aide d'une calculatrice scientifique ou d'un programme informatique (Maple, Python...). Cela conduit à :

$$\cdot \int_0^{2\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos\left(2\arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)}} \approx 2,41$$

La durée du trajet BO le long de la cycloïde inversée est : $\triangle T = \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$. Nous obtenons pour le trajet BO le long de l'arc de cercle :

$$t'' \approx 2,41 \cdot \frac{\sqrt{2\left(\pi^2+4\right)}}{4} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 3,18 \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

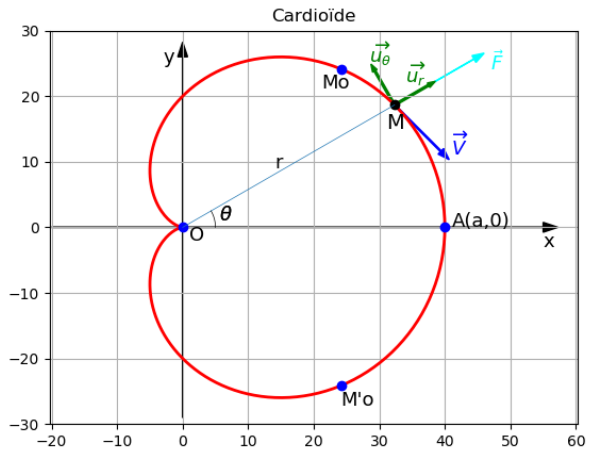
Là encore : bien que la trajectoire circulaire corresponde à un trajet plus court que la cycloïde inversée, la durée du trajet circulaire est un peu plus long. L'écart est cependant assez faible : la pente de la cycloïde est un peu plus grande au tout début du mouvement mais les deux pentes sont très proches pendant la plus grande partie du mouvement.

Animation : Pour bien visualiser le caractère brachistochrone de la cycloïde inversée, voici une animation, au format .avi et au format .mp4, représentant l'évolution de trois masses ponctuelles partant au même instant du point B sans vitesses initiales et glissant sans frottement sur les trois glissières : la cycloïde inversée (en rouge), la circulaire (en magenta) et la rectiligne (en bleu). On voit bien que la masse rouge arrive nettement en avance par rapport à la masse bleu et un peu en avance par rapport à la masse magenta. Le trajet le plus long est le plus rapide !

animation au format .avi animation au format .mp4

Autre exemple de trajectoire tautochrone

Nous allons montrer que, dans certaines conditions très particulières, la cardioïde peut être considérée comme tautochrone. Cette situation, intéressante sur le plan théorique et objet d'un certains nombres de problèmes au niveau (bac+2) ou plus, est tout de même **assez formelle car difficile à réaliser sur le plan expérimental**. Il faut en effet imaginer un petit objet, assimilable à un point matériel, astreint à ce déplacer sans frottement sur une branche de cardioïde, à partir d'une position initiale Mo de vitesse initiale nulle, **sous l'action d'une force motrice constamment radiale et d'intensité fixe**. Pas facile d'obtenir une telle force !



On considère donc qu'un point matériel M, de masse m est mobile sans frottement sur une courbe (C) d'équation polaire :

$r = \frac{a}{2} \cdot [1 + \cos(\theta)]$ (cardioïde)

En dehors de la réaction normale exercée par le système de guidage, ce point est soumis à la force $\overrightarrow{F} = 2mk^2a \cdot \overrightarrow{u_r}$ où k est une constante et $\overrightarrow{u_r}$ un vecteur unitaire porté par OM. Cette façon, a priori un peu compliquée, d'écrire l'expression du vecteur force apporte des simplifications d'écriture ultérieurement...

On suppose le repère (O,x,y) lié à la cardioïde galiléen. On peux supposer que le plan (O,x,y) est horizontal. Dans ces conditions, la réaction normale à la trajectoire exercée par le système de guidage doit avoir une composante verticale ascendante qui compense le poids et une composante horizontale qui maintient M sur la cardioïde.

On applique le théorème de l'énergie cinétique à la masse m entre deux instants de date t et (t+dt) : la variation élémentaire d'énergie cinétique est égale au travail élémentaire des forces appliquées. Puisque la réaction normale du système de guidage et le poids ne travaillent pas, on obtient :

$$dE_c = \delta W = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Le déplacement élémentaire de M a pour expression générale, en coordonnées polaires :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot d\theta \cdot \overrightarrow{u_\theta} \quad donc \quad \delta W = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = 2mk^2a \cdot \overrightarrow{u_r} \cdot (dr \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot d\theta \cdot \overrightarrow{u_\theta})$$

$$dE_c = 2mk^2a \cdot dr \quad soit \quad \frac{dE_c}{dr} = 2mk^2a$$

On intègre par rapport à r :

$$E_c = 2mk^2 \cdot a \cdot r + constante$$

Cas particulier de l'instant initial de vitesse nulle :

$$0 = 2mk^2 \cdot a \cdot r_0 + constante$$

Soustraction membre à membre pour faire disparaître la constante :

$$E_c = 2mk^2 \cdot a \cdot (r - r_0)$$

Sachant que : $E_c = \frac{1}{2}m.v^2$, on obtient en simplifiant :

$$\boxed{v^2 = 4 \cdot k^2 \cdot a \cdot (r - r_0)}$$

Un carré ne pouvant être négatif ; sachant de plus : a>0, il faut nécessairement : $r \geq r_0$. Or, la fonction cosinus étant monotone décroissante pour $0 < \theta < \pi$, une augmentation de r à partir de la valeur r_o se fait nécessairement par diminution de l'angle polaire. Le mouvement a donc nécessairement lieu de M_o vers A.

En coordonnées polaires, l'expression générale du vecteur vitesse est :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r} \cdot \overrightarrow{u_r} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{u_\theta}$$

Compte tenu de l'équation de la trajectoire :

$$\dot{r} = -\frac{a}{2} \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} \quad ; \quad r \cdot \dot{\theta} = \frac{a}{2} \cdot \dot{\theta} \cdot [1 + \cos(\theta)]$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \dot{\theta}^2 \left[\sin^2(\theta) + 1 + \cos^2(\theta) + 2.\cos(\theta)\right]$$

$$v^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \dot{\theta}^2 [1 + \cos(\theta)] = a^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

En tenant compte du résultat de la première question :

$$v^2 = 2k^2 \cdot a^2 \cdot [1 + \cos(\theta)] - 4k^2.a.r_0 = 4k^2 \cdot a^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4k^2.a.r_0$$

En posant : $u = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on remarque :

$$\dot{u} = \frac{\dot{\theta}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ; \quad \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - u^2$$

En identifiant les deux expressions de v^2 :

$$4a^2 \cdot \dot{u}^2 = 4k^2 \cdot a^2 - 4k^2.a.r_0 - 4k^2 \cdot a^2 \cdot u^2$$

Après simplification par $8a^2$ et dérivation par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{u} \cdot \ddot{u} = -k^2 \cdot \dot{u} \cdot u$$

puisque $\dot{u} \neq 0$ au cours du mouvement, on obtient par simplification :

$$\boxed{\ddot{u} + k^2 \cdot u = 0}$$

Cette équation différentielle admet pour solution générale :

$$u = U_m \cdot \cos(k.t + \varphi)$$

On choisit : k>0. Puisque, à t = 0, u est maximum avec une dérivée par rapport au temps nulle : $\varphi = 0$. D'où le résultat :

$$\boxed{u = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = U_m \cdot \cos(k.t)}$$

Puisque, au cours du temps, u varie entre deux valeurs opposées U_m et $-U_m$, θ varie de même entre deux valeurs opposées. Le point M va donc osciller de part et d'autre du point A entre deux positions symétriques par rapport à l'axe (O,x) les points M_o et M'_o de la figure. Cela est bien sûr cohérent avec le fait que r, comme déjà expliqué, ne peut dépasser la valeur initiale r_o. La période de ces oscillations est :

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

Contrairement, par exemple, au cas des oscillations d'un pendule dans le champ de pesanteur, cette période est indépendante de l'amplitude des oscillations, indépendante de la position initiale M_o. Les oscillations sont qualifiées d'isochrones. Conséquence : la durée du parcours de M_oà A vaut un quart de période soit :

$$\boxed{\Delta t = \frac{\pi}{2k}}$$

Cette durée est bien indépendante de la position initiale du point M sur la trajectoire. Cette trajectoire, **pour le type de force bien particulier existant ici**, est qualifiée de « tautochrone ».

retour à la page principale