

# Les solutions d'une équation différentielle du second ordre

*Dans de très nombreuses situations : étude d'un oscillateur électrique ou mécanique, étude de régimes transitoires, étude de la stabilité de divers systèmes, ... , le physicien est amené à résoudre ce type d'équation différentielle. Cette fiche n'a pas la prétention de remplacer un cours de mathématiques sur le sujet ; elle se contente de rappeler les résultats possibles et leurs implications physiques.*

## Présentation du problème :

Dans le cas général, l'équation différentielle du second ordre peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = K$$

où  $K$  est une constante éventuellement nulle. Dans les cas très fréquents où cette équation caractérise le comportement d'un oscillateur, la constante  $\lambda$  caractérise les effets dissipatifs d'énergie. Dans le cas limite où ces effets dissipatifs sont inexistantes :  $\lambda=0$ . La solution est de la forme :

$$x(t) = \frac{K}{\omega_0^2} + A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

où  $A$  et  $\varphi$  sont deux constantes qui dépendent des conditions initiales. Dans ce cas particulier, les oscillations sont sinusoïdales autour de la position d'équilibre  $x_e = \frac{K}{\omega_0^2}$  et la pulsation des oscillations vaut  $\omega_0$ . Pour cette raison,  $\omega_0$  est appelé "pulsation propre" de l'oscillateur. C'est une constante positive.

La constante  $\lambda$  a pour dimension l'inverse d'un temps comme la pulsation propre.

**Remarque :** il est courant de poser :  $\lambda = \xi \cdot \omega_0$ . Cela à l'avantage d'introduire une constante  $\xi$  sans dimension. D'autres auteurs préfèrent noter :  $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}$ . L'introduction de ce facteur de qualité  $Q$  présente parfois de l'intérêt quand il s'agit d'étudier la réponse de l'oscillateur à une excitation sinusoïdale. Dans le contexte de cette étude, cette notation alourdirait inutilement les calculs en introduisant des grandeurs fractionnaires supplémentaires. De plus, comme nous allons le voir, la présence du facteur "2" apporte des simplifications dans l'expression du discriminant de l'équation caractéristique.

## Recherche de l'expression générale de la solution.

Il est possible d'exprimer la solution générale de cette équation différentielle comme la somme de deux termes :

- un premier terme constant correspondant au cas particulier du régime indépendant du temps (souvent un état d'équilibre) :

$$x_e = \frac{K}{\omega_0^2}$$

- un second terme solution de l'équation homogène :  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ .

Nous allons rechercher les solutions de l'équation homogène correspondant à l'expression générale :  $x_h = A \cdot \exp(r \cdot t)$  où  $A$  et  $r$  sont deux constantes réelles ou complexes. Sachant que, dans ces cas :

$$\frac{dx_h}{dt} = r \cdot x_h \quad \text{et} : \quad \frac{d^2x_h}{dt^2} = r^2 \cdot x_h$$

$r$  doit être solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda \cdot r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré s'écrit :

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$$

ou, si on préfère :

$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

*Remarque : l'intérêt d'avoir introduit un "2" dans l'expression de la constante de dissipation apparaît clairement maintenant : le signe du discriminant dépend simplement de  $\xi^2$  ou de la comparaison entre  $\lambda$  et  $\omega_0$ .*

Selon la valeur du discriminant, on peut envisager trois cas :

$\Delta < 0$  : soit  $|\xi| < 1$  ou  $|\lambda| < \omega_0$  : les racines de l'équation caractéristique sont deux complexes conjugués :  $r = -\lambda \pm i \cdot \sqrt{-\Delta} = -\xi\omega_0 \pm i \cdot \sqrt{-\Delta}$  ;

$\Delta = 0$ , soit  $|\xi| = 1$  ou  $|\lambda| = \omega_0$  : la solution générale de l'équation différentielle homogène est de la forme :  $x_h = (At + B) \exp(-\xi\omega_0 \cdot t) = (At + B) \exp(-\lambda \cdot t)$  où A et B sont deux constantes ;

$\Delta > 0$  : soit  $|\xi| > 1$  ou  $|\lambda| > \omega_0$  les racines de l'équation caractéristique sont deux réels :  $r = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\Delta} = -\lambda \pm \sqrt{\Delta}$ .

Dans tous les cas, les solutions font intervenir  $\exp(-\xi\omega_0 \cdot t) = \exp(-\lambda \cdot t)$ . Imaginons :  $\xi < 0$  ; alors, la solution va diverger vers  $\pm\infty$ . Cette situation peut se rencontrer lorsque la situation modélisée est instable : tentative d'étude des oscillations autour d'une position d'équilibre mécaniquement instable, étude en régime linéaire d'un montage à ampli. op. alors que ce régime linéaire est instable pour ce type de montage...

*Conséquence : dans la suite de cette étude, nous supposons  $\xi > 0$  soit  $\lambda > 0$ .*

## Étude des trois types de solutions.

### Premier cas : régime pseudo - périodique.

Cette situation se rencontre lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est négatif, soit lorsque :

$$\boxed{\xi < 1 \quad \text{ou} \quad \lambda < \omega_0}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :  $r_1 = -\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$  et :  $r_2 = -\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ .

Pour alléger les notations, on pose :  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$  : pseudo-pulsation. Les solutions de l'équation différentielles sont donc de la forme :

$$x_h = A \cdot \exp(r_1 \cdot t) + B \cdot \exp(r_2 \cdot t) = \exp(-\xi\omega_0 \cdot t) [A \cdot \exp(i\omega \cdot t) + B \cdot \exp(-i\omega \cdot t)]$$

Sachant que :  $\exp(i\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t)$  et :  $\exp(-i\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot t) - i \cdot \sin(\omega \cdot t)$  :

$$A \cdot \exp(i\omega \cdot t) + B \cdot \exp(-i\omega \cdot t) = (A + B) \cos(\omega \cdot t) + i(A - B) \sin(\omega \cdot t)$$

Sachant que seules les solutions réelles nous intéressent ici, on peut poser :

$$A + B = K_1 \quad \text{et} \quad A - B = -i \cdot K_2$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes **réelles** dépendant des conditions initiales :

$$x_h = \exp(-\xi\omega_0 \cdot t) [K_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + K_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)]$$

D'où l'expression générale de  $x = f(t)$  :

$$\boxed{x(t) = \frac{K}{\omega_0^2} + \exp(-\xi\omega_0 \cdot t) [K_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + K_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)] = \frac{K}{\omega_0^2} + \exp(-\lambda \cdot t) [K_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + K_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)]}$$

*Remarque : selon la situation et en particulier selon les conditions initiales, il peut être utile de remplacer la somme (sinus + cosinus) par un simple cosinus avec une phase initiale non nulle :*

$$K_3 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = K_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + K_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \forall t$$

En développant le cosinus on obtient :

$$K_3 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = K_3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t) - K_3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \forall t$$

L'identification conduit à :

$$K_3 \cdot \cos(\varphi) = K_1 \quad \text{et} \quad K_3 \cdot \sin(\varphi) = -K_2$$

On pose arbitrairement  $K_3 > 0$ , les considérations de signes étant réglées en ajustant la valeur de la phase initiale  $\varphi$  :

$$K_3 = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = -\frac{K_2}{K_1}$$

La tangente permet une détermination de  $\varphi$  à  $\pi$  près. L'ambiguïté est levée en remarquant que  $\cos(\varphi)$  est du signe de  $K_1$  ou que  $\sin(\varphi)$  est du signe de  $-K_2$  puisque  $K_3$  est choisi arbitrairement positif.

L'évolution de  $x(t)$  en fonction du temps peut être considérée comme des oscillations autour de l'état d'équilibre dont l'amplitude décroît exponentiellement au cours du temps. On parle de **régime pseudo-périodique**.

La **pseudo-période T** est la période de  $K_3 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$  soit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

### ÉTUDE D'UN EXEMPLE : ÉTABLISSEMENT D'UN COURANT DANS UN CIRCUIT (RLC) SÉRIE.

Le montage est schématisé ci-contre : un générateur de tension continue de force-électromotrice  $E$  est relié en série à un interrupteur (K), une bobine d'inductance  $L$ , un condensateur de capacité  $C$  et un conducteur ohmique de résistance réglable.  $R$  est la résistance totale du circuit, c'est à dire celle du conducteur ohmique ajoutée à celle de la bobine et à la résistance interne du générateur. L'interrupteur étant ouvert depuis suffisamment de temps pour qu'aucun courant ne circule, on court-circuite le condensateur pendant une courte durée de façon à le décharger totalement puis, à la date  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur (K). Il s'agit d'étudier l'évolution au cours du temps de la tension  $u(t)$  aux bornes du condensateur.

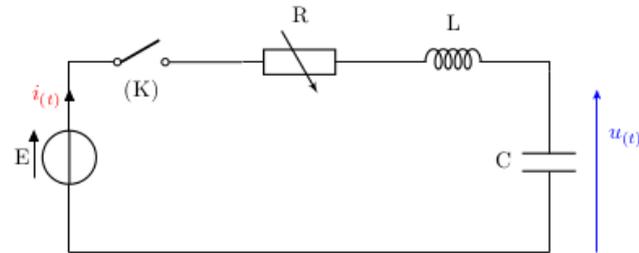


FIGURE 1 –

Une fois (K) fermé, la loi des mailles conduit à :

$$E = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + u(t)$$

Or :  $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ . En reportant dans l'équation différentielle précédente, on obtient :

$$E = L \cdot C \cdot \frac{d^2u(t)}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

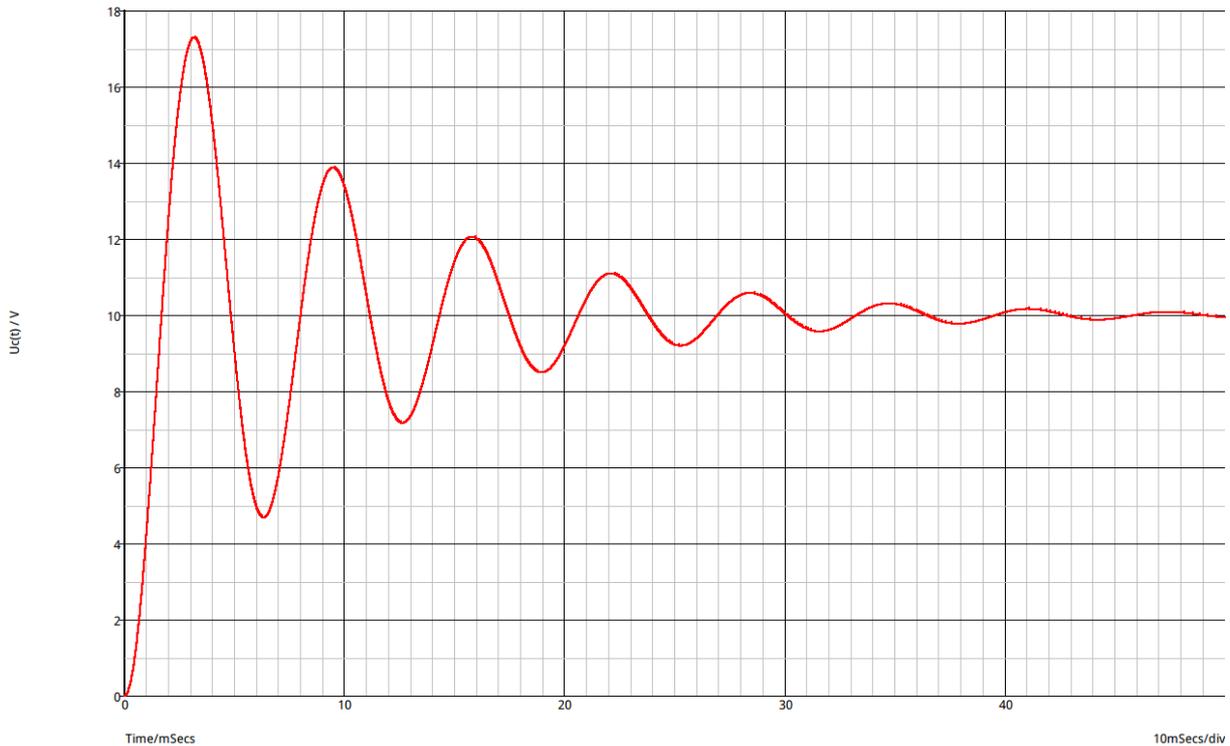
Soit après division de tous les termes par  $(L \cdot C)$  :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u(t) = \frac{E}{L \cdot C}$$

On pose :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} & \text{pulsation propre du circuit} \\ \frac{R}{L} = 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 & \text{soit : } \xi = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

On choisit :  $L = 100\text{mH}$  ;  $C = 10,0\mu\text{F}$  ; ce qui conduit à :  $\omega_0 = 1,00 \cdot 10^3 \text{rad/s}$  et  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6,28\text{ms}$ . On règle :  $R = 20\Omega$ , ce qui correspond à  $\xi = 0,10$ . Voici une simulation traduisant l'évolution de  $u(t)$  en fonction de  $t$  :



On obtient bien des oscillations pseudo-périodiques autour de la tension asymptotique  $E = 10V$ . Les conditions initiales permettent d'obtenir les constantes  $K_3$  et  $\varphi$  de l'équation :  $u(t) = E + K_3 \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ .

La pseudo-pulsation vaut :  $\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 1000 \cdot \sqrt{0,99} \approx 995 \text{rad/s}$ .

La continuité de la tension aux borne du condensateur conduit à  $u(0) = 0 = E + K_3 \cdot \cos(\varphi)$ . La continuité de l'intensité, assurée par la présence de la bobine, conduit à :  $i(0) = C \cdot \left(\frac{du(t)}{dt}\right)_{t=0}$ .

L'expression générale de l'intensité est :

$$i(t) = K_3 \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot [-\xi \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) - \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)]$$

Une intensité nulle à l'instant initial impose donc :  $\xi \cdot \omega_0 \cdot \cos(\varphi) + \omega \cdot \sin(\varphi) = 0$

Ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} \tan(\varphi) = \frac{-\xi \cdot \omega_0}{\omega} = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{0,1}{\sqrt{0,99}} \approx -0,100 & \text{soit : } \varphi = -0,100 \text{rad} \text{ ou } \varphi = (\pi - 0,100) \text{rad} \\ K_3 \cdot \cos(\varphi) = -E = -10V & \text{puisque : } K_3 > 0 \quad \cos(\varphi) < 0 \end{cases}$$

La résolution du système conduit à :  $K_3 = \frac{E}{\cos(0,100)} \approx 10,05V$  et  $\varphi = (\pi - 0,100) \text{rad}$ . Puisque :  $\cos(\omega \cdot t + \pi - 0,100) = -\cos(\omega \cdot t - 0,100) \quad \forall t$ , l'expression finale de  $u(t)$  devient, exprimée en volts :

$$u(t) = 10 \cdot [1 - 1,005 \exp(-100 \cdot t) \cdot \cos(995 \cdot t - 0,100)]$$

*Remarque : la condition  $\left(\frac{du(t)}{dt}\right)_{t=0} = 0$  se traduit graphiquement par une courbe présentant une tangente horizontale à l'instant initial.*

**Décroissement logarithmique** Cette notion présente un grand intérêt pratique lorsqu'on dispose d'un enregistrement expérimental de la courbe à l'aide d'un oscilloscope numérique ou grâce à une carte d'acquisition reliée à un capteur.

Sur le plan théorique, on peut partir de la remarque suivante : si l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement au cours du temps, le logarithme de cette amplitude décroît linéairement en fonction du temps. On définit le décroissement logarithmique de la façon suivante dans le cas général :

$$\delta = \ln \left( \frac{x(t) - x_e}{x(t+T) - x_e} \right)$$

soit, dans le cas particulier étudié :

$$\delta = \ln \left( \frac{u(t) - E}{u(t+T) - E} \right) = \ln \left( \frac{\exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)}{\exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot (t+T)) \cdot \cos(\omega \cdot (t+T))} \right)$$

Par définition de la pseudo-période :  $\cos(\omega \cdot t) = \cos(\omega \cdot (t+T)) \quad \forall t$ . L'expression se simplifie :

$$\delta = \ln \left( \frac{\exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot t)}{\exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot (t+T))} \right) = \xi \cdot \omega_0 \cdot T = \xi \cdot \omega_0 \cdot \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

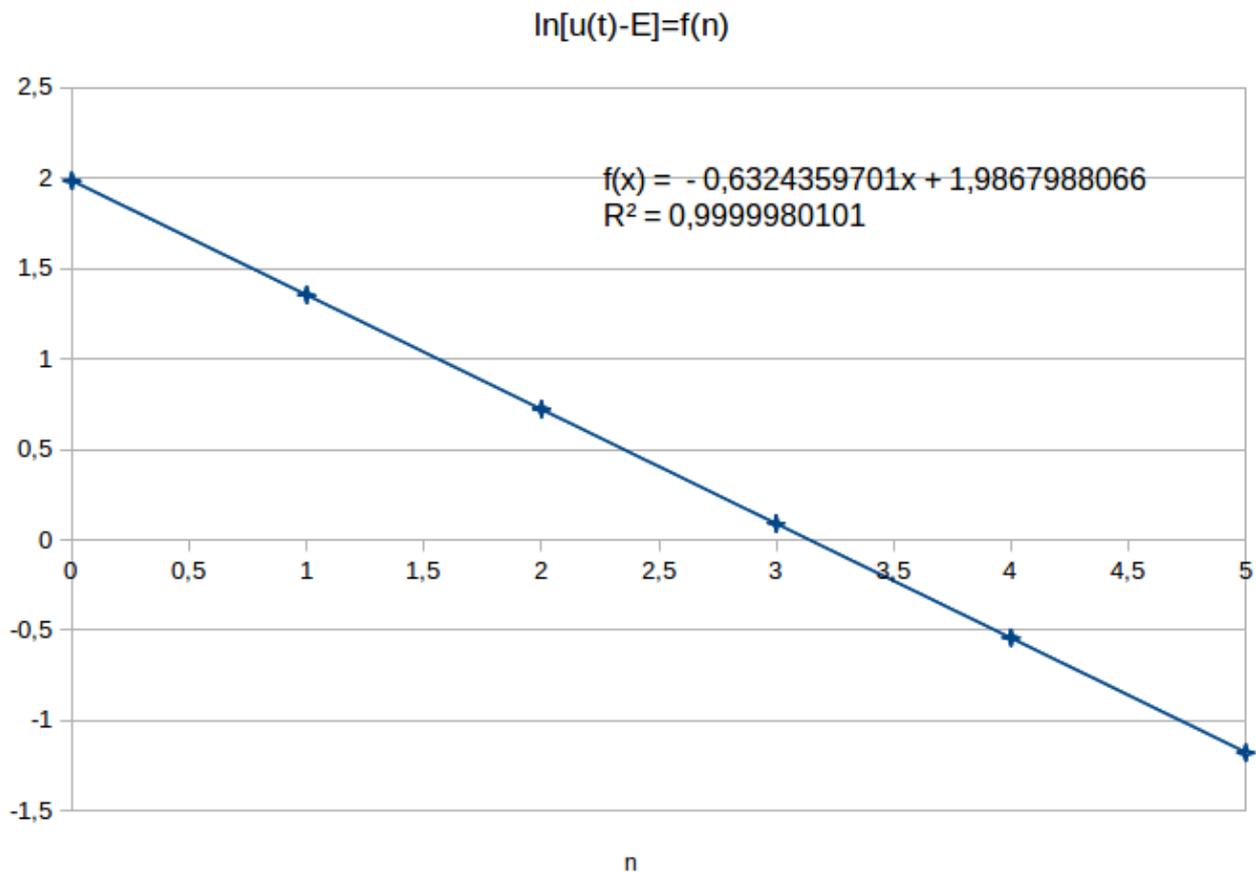
Soit, avec :  $\omega_0 \cdot T_0 = 2 \cdot \pi$  :

$$\delta = \frac{2 \cdot \pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Pour vérifier la décroissance exponentielle de l'amplitude, on peut mesurer les valeurs maximales successives de  $(u(t)-E)$  aux dates  $t_1, t_1+T, t_1+2T, \dots, t_1+nT$ . Les valeurs correspondantes de ces maximums sont :  $E \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot t_1), E \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot (t_1+T)), E \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot (t_1+2T)) \dots E \cdot \exp(-\xi \cdot \omega_0 \cdot (t_1+nT))$ . Les logarithmes de ces valeurs sont respectivement :  $-\xi \cdot \omega_0 \cdot t_1 + \ln(E); -\xi \cdot \omega_0 \cdot (t_1+T) + \ln(E); -\xi \cdot \omega_0 \cdot (t_1+2T) + \ln(E); \dots; -\xi \cdot \omega_0 \cdot (t_1+nT) + \ln(E)$ . Si on trace la courbe représentant les variations de  $\ln(u(t) - E)$  en fonction de  $n$ , on obtient théoriquement une droite de coefficient directeur  $(-\delta)$ . Dans le cas de l'enregistrement précédent, on obtient le tableau de mesures ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
t(ms)	3,2075	9,434	15,800	22,170	28,350	34,620
u(t) (V)	17,280	13,875	12,062	11,094	10,582	10,308
u(t)-E (V)	7,280	3,875	2,062	1,094	0,582	0,308
ln(u(t)-E)	1,985	1,354	0,724	0,0898	-0,541	-1,178
t <sub>n</sub> - t <sub>n-1</sub> (ms)		6,226	6,366	6,370	6,180	6,270

La valeur moyenne de  $t_n - t_{n-1}$  est égale à 6,2825ms. Cela est cohérent avec la théorie. La courbe représentant les variations de  $\ln(u(t) - E)$  en fonction de  $n$  est représenté ci-dessous.



Puisqu'il s'agit d'une simulation et non de mesures réelles, l'accord avec la théorie est évidemment excellent : les points sont très proches de la droite de tendance comme le prouve la valeur absolue du coefficient de corrélation très proche de l'unité et le coefficient directeur de la droite de tendance nous fournit une valeur du décrement logarithmique extrêmement proche de la valeur théorique.

La valeur expérimentale est :  $\delta = 0,6324$ ; la valeur théorique vaut :  $\delta = \frac{2 \cdot \pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{0,2 \cdot \pi}{\sqrt{0,99}} \approx 0,6315$ ; l'écart relatif n'est que de 0,15%. En pratique, avec des mesures, la méthode permet de déterminer la constante  $\xi$ , la pseudo période puis la période propre.

## Second cas : régime critique.

Cette situation correspond au cas particulier :

$$\boxed{\xi = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = \omega_0}$$

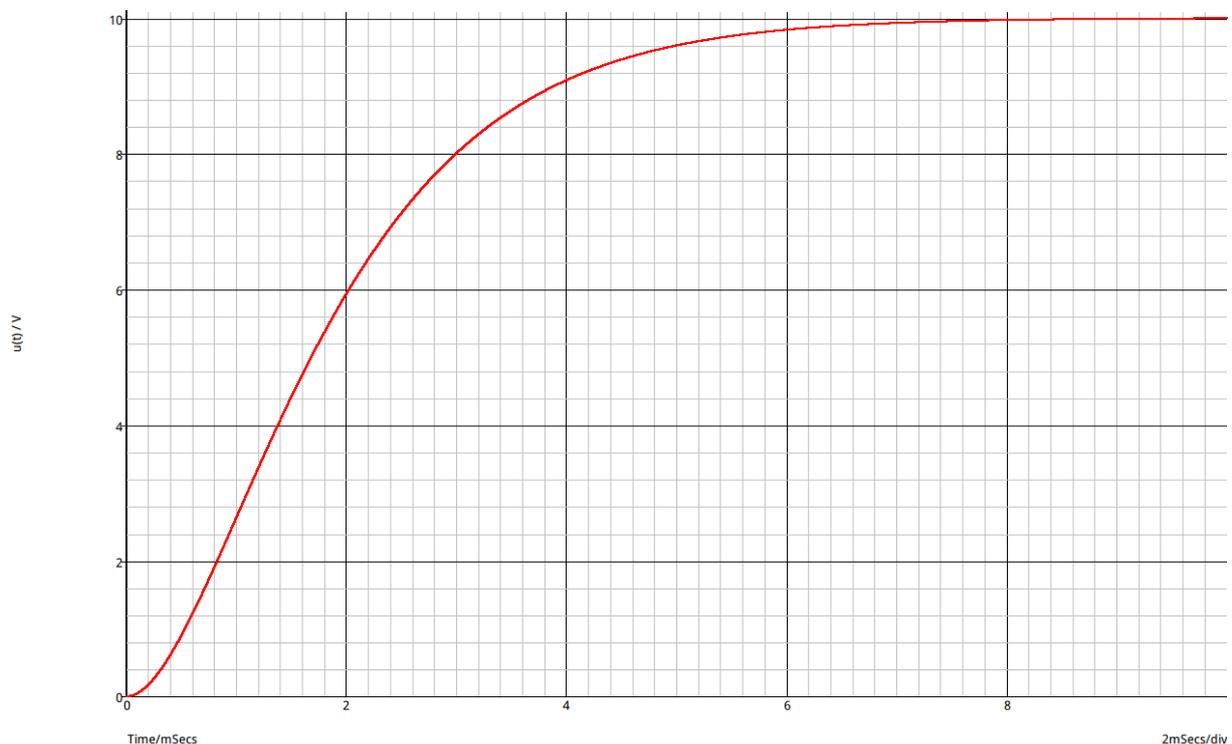
L'équation caractéristique admet une racine double :  $r = \omega_0$ . Dans ces conditions, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\boxed{x(t) = \frac{K}{\omega_0^2} + (A \cdot t + B) \cdot \exp(-\omega_0 \cdot t)}$$

où A et B sont deux constantes dépendant des conditions initiales.

### ÉTUDE D'UN EXEMPLE : ÉTABLISSEMENT D'UN COURANT DANS UN CIRCUIT (RLC) SÉRIE.

Nous reprenons le circuit précédent en réglant la valeur de la résistance à  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega$ . La simulation conduit à la courbe  $u = f(t)$  représentée ci-dessous :



Les conditions initiales sont les mêmes que précédemment :  $u(0) = E + B = 0$  donc :  $B = -E$ .

$\frac{du(t)}{dt} = [A - \omega_0 (A \cdot t + B)] \cdot \exp(-\omega_0 \cdot t)$ ; cette valeur est nulle à  $t = 0$  :  $A - \omega_0 \cdot B = 0$  donc :  $A = -\omega_0 \cdot E$ ; d'où l'expression théorique de la tension :

$$u(t) = E \cdot [1 - (1 + \omega_0 \cdot t) \cdot \exp(-\omega_0 \cdot t)]$$

On peut chercher à évaluer la durée  $t_2$  de ce régime critique. En gardant le même critère que dans le cas précédent, cela conduit à :  $(1 + \omega_0 \cdot t_2) \cdot \exp(-\omega_0 \cdot t_2) = \exp(-5)$ . On obtient numériquement :  $\omega_0 \cdot t_2 \approx 7,1$  soit :  $t_2 \approx \frac{7,1T_0}{2\pi} \approx 1,13T_0$ . Cela conduit ici à une durée de 7,1ms, résultat cohérent avec l'enregistrement.

Pour résumer : **le régime critique correspond bien au retour le plus rapide à la situation asymptotique si on s'interdit tout dépassement de l'état asymptotique. Si on tolère un léger dépassement de cette valeur asymptotique avant stabilisation, la durée minimale est obtenue pour un régime pseudo-périodique avec  $\xi = 0,70$  soit encore pour  $\lambda = 0,70 \cdot \omega_0$ .**

### Troisième cas : régime apériodique.

Cette situation correspond au cas tels que :

$$\xi > 1 \text{ ou } \lambda > \omega_0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont deux réels négatifs :  $r_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$  et :  $r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ .

soit :

$$r_1 = \omega_0 \left( \sqrt{\xi^2 - 1} - \xi \right) \quad \text{et} : \quad r_2 = -\omega_0 \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right)$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme générale :

$$x(t) = \frac{K}{\omega_0^2} + A \cdot \exp(r_1 \cdot t) + B \cdot \exp(r_2 \cdot t)$$

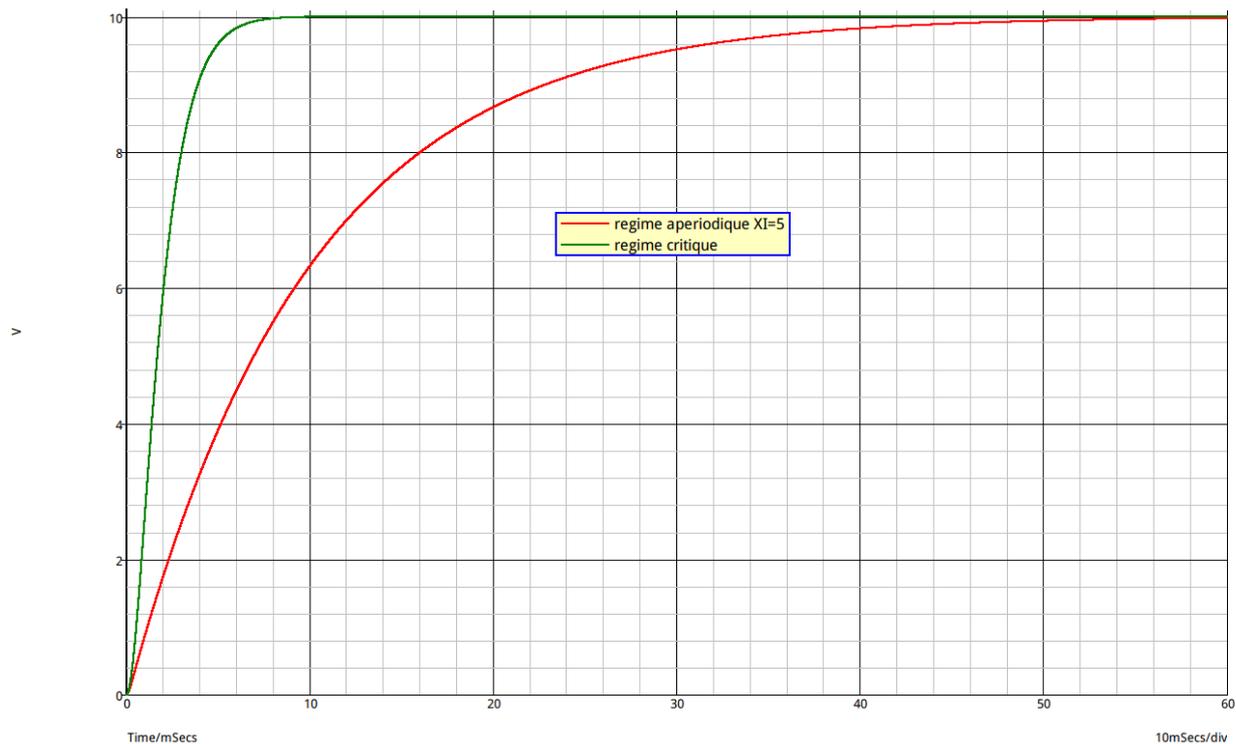
où A et B sont deux constantes dépendant des conditions initiales.

Aucune oscillation autour de la situation d'équilibre n'est possible, comme dans le cas critique.

$|r_1| < |r_2|$  : l'exponentielle faisant intervenir  $r_2$  décroît donc plus vite au cours du temps que celle faisant intervenir  $r_1$ . La durée de ce régime apériodique est donc imposé par le terme donc la décroissance est la plus lente. En retenant le même critère que dans les cas précédents, la durée  $t_3$  estimé de ce régime vérifie donc l'égalité :  $t_3 \approx \frac{5}{r_1} \approx \frac{5}{\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$  soit :  $t_3 \approx \frac{0,8 \cdot T_0}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}$ .

### ÉTUDE D'UN EXEMPLE : ÉTABLISSEMENT D'UN COURANT DANS UN CIRCUIT (RLC) SÉRIÉ.

Nous conservons le montage précédent en réglant maintenant :  $R = 1000\Omega$  soit  $\xi = 5$ . Nous obtenons la courbe ci-dessous (en rouge) à laquelle se superpose celle correspondant au régime critique (en vert).



Dans les deux cas, aucun dépassement de la tension d'équilibre n'est observée. La durée estimée du régime apériodique est nettement supérieure à celle du régime critique :  $t_3 \approx \frac{0,8 \cdot T_0}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} \approx 50ms$ , ce qui est cohérent avec l'enregistrement.

$$u(t) = E + A \cdot \exp(r_1 \cdot t) + B \cdot \exp(r_2 \cdot t)$$

$\frac{du(t)}{dt} = A \cdot r_1 \exp(r_1 \cdot t) + B \cdot r_2 \exp(r_2 \cdot t)$ . Sachant que cette dérivée est nulle à l'instant initial, on obtient :

$$A \cdot r_1 + B \cdot r_2 = 0$$

La tension initiale est nulle :  $E + A + B = 0$ . Ce système de deux équations à deux inconnues admet comme solutions :

$$\begin{cases} A = -E \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} + \xi}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} & A = -10 \cdot \frac{\sqrt{24} + 5}{2\sqrt{24}} \approx -10,1V \\ B = -E \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} & B = 10 \cdot \frac{5 - \sqrt{24}}{2\sqrt{24}} \approx 0,103V \\ r_1 = \omega_0 \left( \sqrt{\xi^2 - 1} - \xi \right) & r_1 = 10^3 (\sqrt{24} - 5) \approx -101s^{-1} \\ r_2 = -\omega_0 \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right) & r_2 = -10^3 (\sqrt{24} + 5) = -9899s^{-1} \end{cases}$$

D'où l'expression générale de  $u(t)$  (en volts) pour  $\xi = 5$  soit pour  $\lambda = 5\omega_0$  :

$$u(t) = 10 - 10,1 \cdot \exp(-101 \cdot t) + 0,103 \cdot \exp(-9899 \cdot t)$$

## Quelques mises au point concernant la durée estimée d'un régime transitoire du deuxième ordre.

**De nombreux ouvrages de physique affirment : "le régime critique permet le retour le plus rapide à l'état d'équilibre stable". Nous allons montrer que, sans plus de précision, cette affirmation est fausse.**

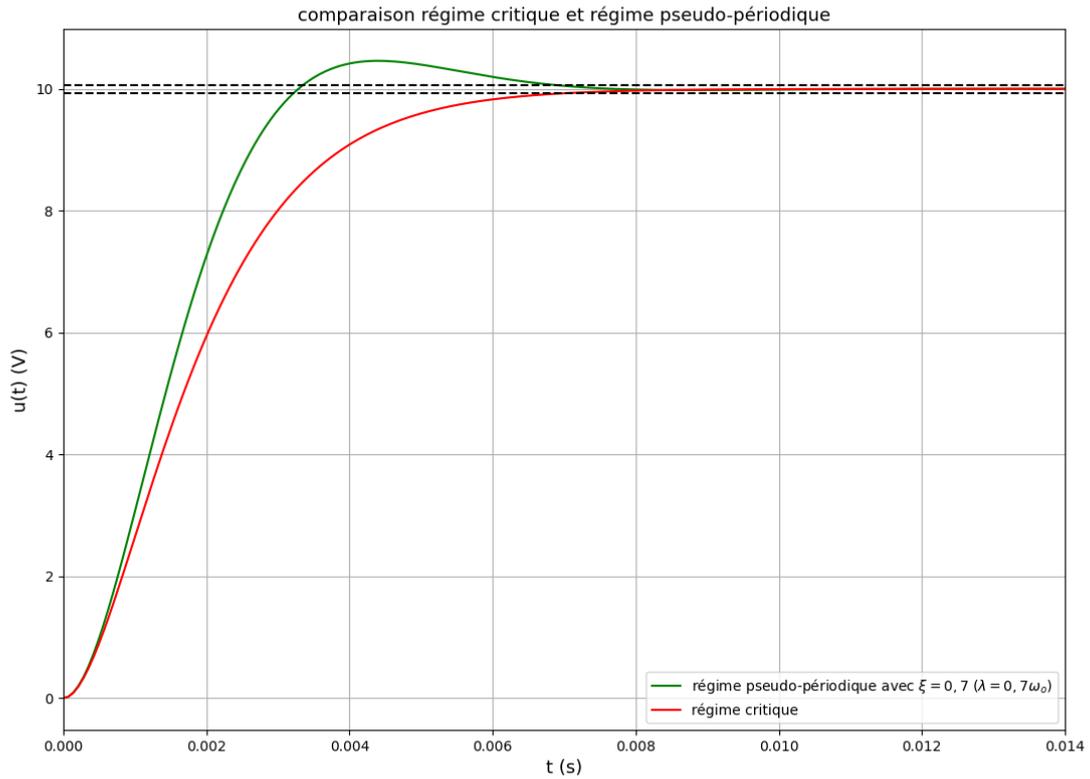
Comme pour les régimes transitoires du premier ordre, la solution stable de l'équation différentielle admet une limite asymptotique et est donc, théoriquement, atteinte au bout d'un temps infini. Pour définir une durée, notée  $T_{fin}$  du régime transitoire, il faut donc choisir arbitrairement mais de façon réaliste, une condition sur  $T_{fin}$  permettant de considérer l'état stable atteint pour  $t \geq T_{fin}$ . Pour les régimes transitoires du premier ordre, les physiciens font couramment l'approximation suivante :

$$\exp(-x) \approx 0 \quad \text{si : } x \geq 5$$

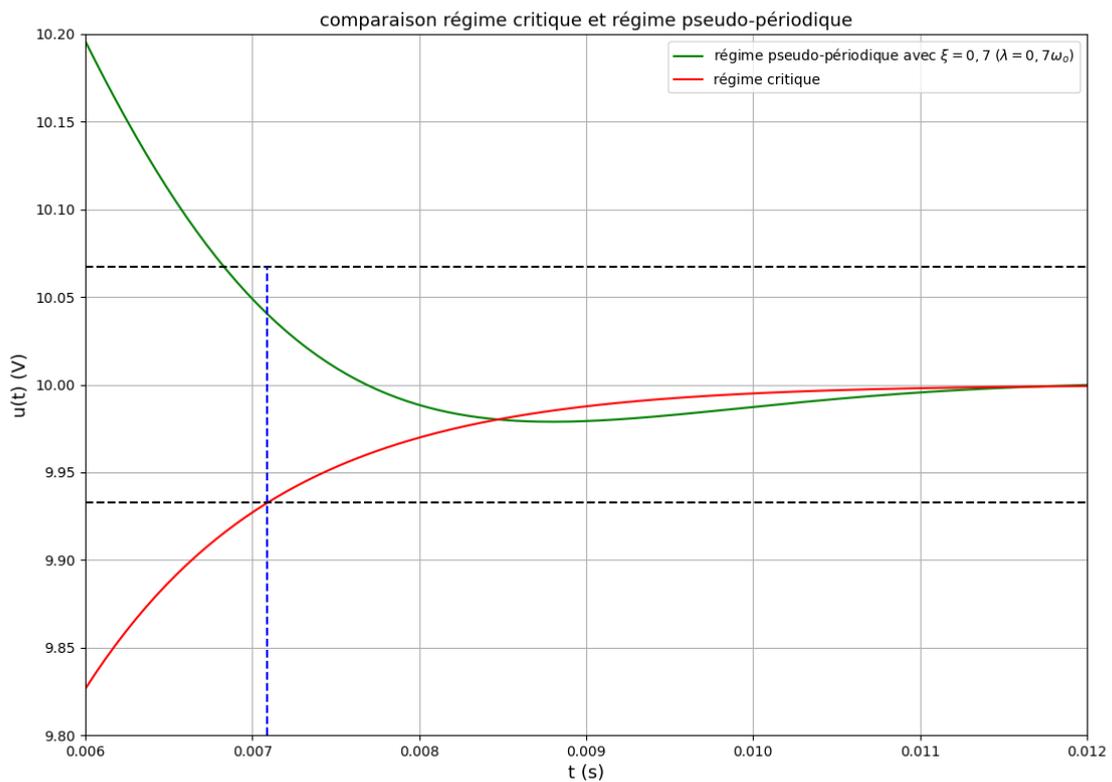
C'est en utilisant cette approximation que l'on montre que la durée estimée d'un régime transitoire du premier ordre est d'environ cinq fois la constante de temps. Nous savons que :

$$\exp(-5) = 6,74 \cdot 10^{-3} = 0,674 \cdot 10^{-2}$$

Nous allons donc considérer que le régime transitoire est terminé dès que  $u(t)$  ne s'éloigne plus, de manière définitive de plus de 0,674% de la valeur asymptotique. ce qui revient à considérer que le régime asymptotique est atteint quand la valeur absolue de l'écart relatif à la valeur asymptotique ne dépasse pas  $(1 - e^{-5})$ , par excès ou par défaut. **Cela revient ici à considérer que la durée du régime transitoire est la durée  $T_{fin}$  au bout de laquelle la courbe  $u(t)$  pénètre dans le domaine  $[E \cdot (1 - e^{-5}), E \cdot (1 + e^{-5})]$  (voir horizontale tracées en pointillés noirs) sans en ressortir.**



Les courbes précédentes montrent que le régime asymptotique est obtenu sensiblement à la même date dans les deux cas. Pour une observation plus précise, voici ci-dessous un "zoom" entre  $t=6\text{ms}$  et  $t=12\text{ms}$  au voisinage de l'asymptote  $u=E=10\text{V}$ .



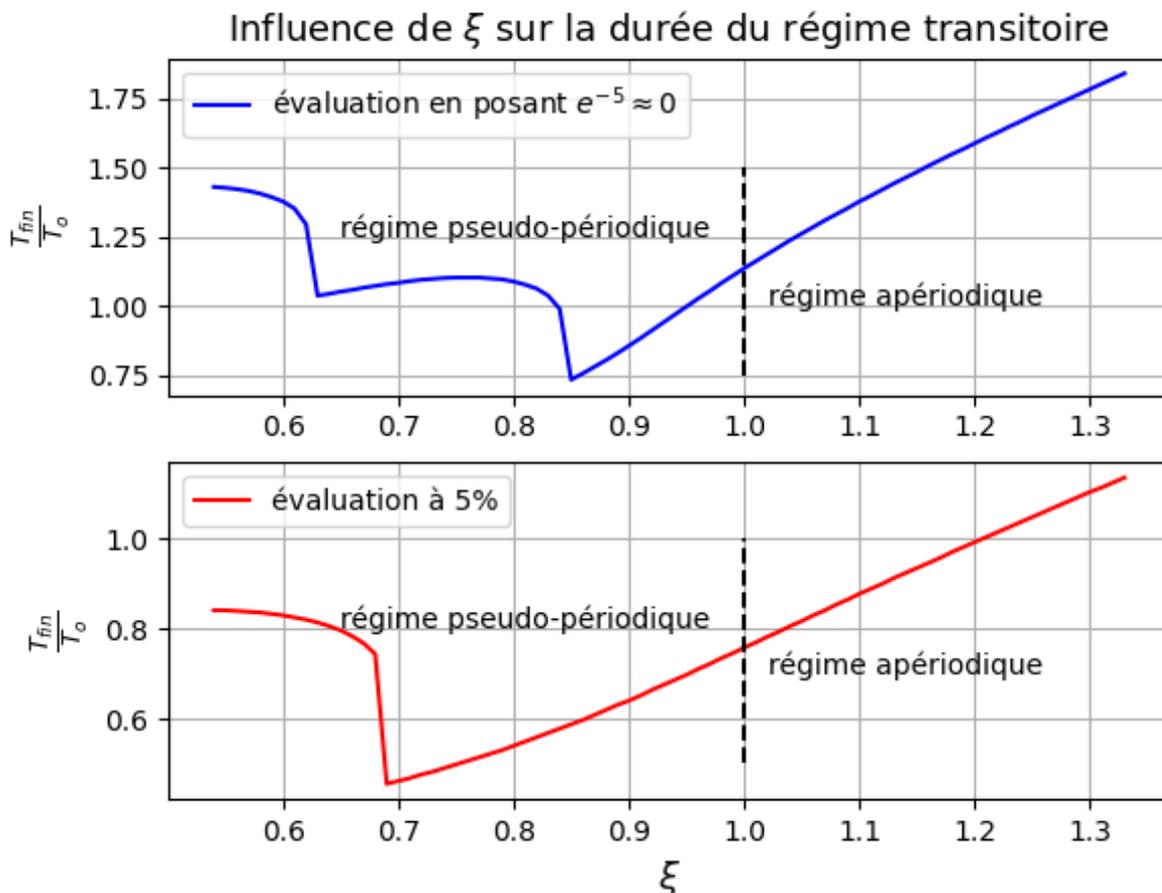
La durée du régime critique est ainsi, comme expliqué plus haut  $t_1 = 7,1\text{ms}$  (voir ligne bleue en pointillées) mais la durée du régime pseudo périodique, avec  $\xi = 0,70$ , est plus courte d'environ 4% avec une valeur  $t_2 = 6,8\text{ms}$ . Cette étude peut être faite pour toutes les valeurs de  $\xi$  comprise entre 0,56 et 1,3. Voir courbe bleue ci-dessous où, pour plus de généralités, on représente en ordonnée non pas  $T_{fin}$  mais  $\frac{T_{fin}}{T_o}$  où  $T_o$  désigne la période propre. On remarque que, pour  $\xi \geq 1$ ,  $T_{fin}$  augmente en fonction de  $\xi$ . **La durée du régime apériodique est donc toujours supérieure à celle du régime critique.**

Cependant, **pour  $\xi$  compris entre 0,63 et 1, la durée du régime pseudo périodique est inférieure à celle du régime critique.**

Si on se limite aux régimes interdisant tout dépassement de l'état asymptotique, donc si on se limite aux régimes critique et apériodique, le régime critique est bien le plus court. Mais, sans cette limitation, **il est faux d'affirmer que le régime critique est le plus court des régimes transitoires.**

Remarque 1 : En Sciences de l'Ingénieur et dans divers domaines techniques, il est courant d'évaluer la durée du régime transitoire  $T_{fin}$  comme la durée nécessaire pour atteindre 95% de la valeur asymptotique. Cela revient ici à considérer que la durée du régime transitoire est la durée  $T_{fin}$  au bout de laquelle la courbe  $u(t)$  pénètre dans le domaine  $[0,95.E, 1,05.E]$  sans en ressortir. L'étude des variations de  $T_{fin}$  en fonction de  $\xi$  conduit à la courbe rouge ci-dessous. Les conclusions sont sensiblement les mêmes que précédemment ; seule différence notable : le minimum de  $T_{fin}$  est obtenu pour une valeur de  $\xi$  un peu différente : 0,69. C'est pour cette raison que les livres de Sciences de l'Ingénieur affirme que le régime transitoire le plus court correspond à  $\xi \approx 0,7$ .

Remarque 2 : Lorsque la limite asymptotique est la valeur nulle : décharge oscillante d'un condensateur à travers une bobine par exemple, les physiciens considèrent en général le régime transitoire terminé lorsque  $u(t)$  pénètre dans l'intervalle  $[-E.exp(-5), E.exp(-5)]$  sans plus en ressortir avec  $E$  : valeur initiale. Les ingénieurs prennent plus souvent comme intervalle  $[-0,05.E, 0,05.E]$ . Cela conduit aux mêmes résultats concernant l'influence de  $\xi$  sur  $T_{fin}$ .



**En conclusion** : S'il est impératif d'éviter tout dépassement de l'état d'équilibre asymptotique, il faut régler le dispositif oscillant au plus près du régime critique en choisissant  $\xi$  le plus proche possible de 1, par valeurs supérieures. En revanche, s'il est possible de tolérer un faible dépassement de la valeur asymptotique, le retour à la position d'équilibre est plus rapide en choisissant une valeur de  $\xi$  un peu inférieure à 1. On peut aussi retenir que cette durée, pour des valeurs de  $\xi$  voisine de 1 ( $\lambda \approx \omega_o$ ), est proche de la période propre  $T_o$ .

retour à la page principale