

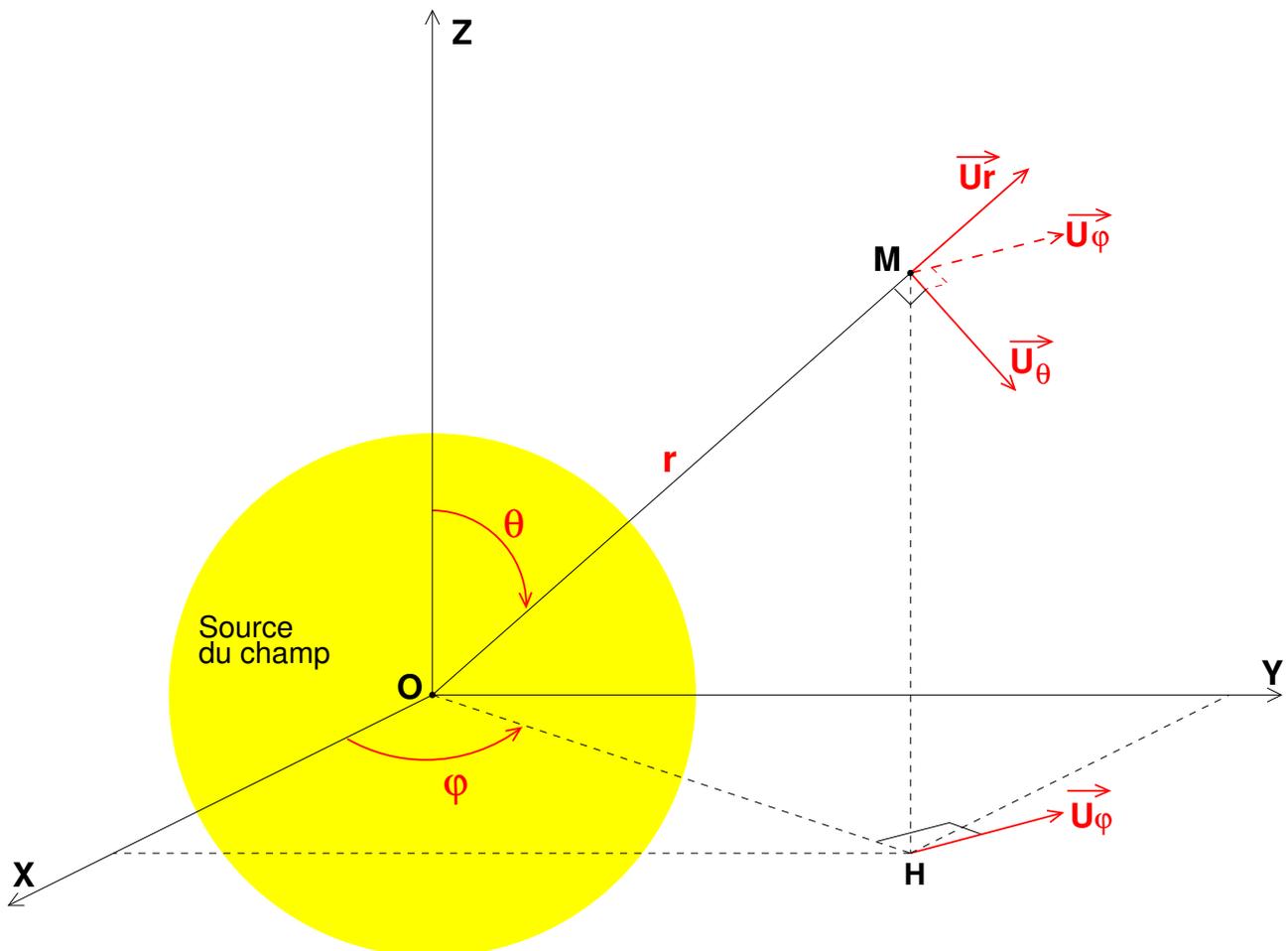
# Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale

## I. Position du problème.

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel M de masse m, en mouvement dans un repère galiléen (O,x,y,z) sous l'action d'une force unique  $\vec{F}$  telle que :

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{u}_r$$

*Remarque : un « point matériel » ou « masse ponctuelle » : cela n'existe pas ! C'est un modèle physique applicable aux solides dont les dimensions sont négligeables devant les autres dimensions du problème et dont l'énergie cinétique de rotation propre est d'influence négligeable. Cette deuxième condition, souvent oubliée, est importante. Imaginons par exemple une boule homogène de masse m qui roule sans glisser sur un plan, le mouvement de son centre d'inertie G étant rectiligne ; aussi petit que puisse être le rayon de la boule, son énergie cinétique est toujours  $\frac{7}{10} \cdot m \cdot V_G^2$ , pas  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_G^2$  !*



Cette force ne dépendant que de la position, on peut lui associer une énergie potentielle  $E_p$  telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

De l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

on déduit :

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -f(r) \quad ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$

Ainsi  $E_p$  ne dépend que de  $r$  et est l'opposé d'une primitive de  $f(r)$ .

*Remarque : le fait qu'une primitive soit définie à une constante près n'est pas gênant dans la mesure où seules les variations d'énergie potentielle ont un sens physique.*

## II. Planéité de la trajectoire.

Le moment cinétique au point O du point matériel M est, par définition :

$$\vec{L}_O = m \cdot \vec{OM} \wedge \vec{V} = m \cdot r \cdot \vec{u}_r \wedge \vec{V}$$

où  $\vec{V}$  désigne le vecteur vitesse de M dans le repère d'étude.

Le théorème du moment cinétique indique que la dérivée par rapport au temps de ce vecteur moment cinétique en O est égal au moment en O de la force de vecteur  $\vec{F}$  :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = r \cdot \vec{u}_r \wedge \vec{F}$$

Les vecteurs  $\vec{F}$  et  $\vec{u}_r$  étant, par définition de la force centrale, colinéaires, on obtient :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \quad \forall t \quad \text{soit } \vec{L}_O : \text{vecteur constant}$$

Le vecteur moment cinétique en O a donc une direction et un sens fixes. Orientons le repère de sorte que :

$$\vec{L}_O = L_O \cdot \vec{u}_y$$

Les propriétés du produit vectoriel et la définition du vecteur moment cinétique en O imposent :

$$\vec{L}_O \perp \vec{OM} \quad \text{et} \quad \vec{L}_O \perp \vec{V}$$

Le point M se déplace nécessairement dans le plan (Ozx).

**Plus généralement, on peut dire que, lorsqu'un point matériel est soumis à la seule action d'une force centrale, sa trajectoire dans un repère galiléen appartient au plan orthogonal au vecteur moment cinétique contenant le centre attracteur O.**

*Remarque : c'est pour cette raison que les satellites artificiels de la terre, dans la mesure où les attractions des autres astres sont négligeables, décrivent dans un repère géocentrique, des orbites dont les plans contiennent le centre de la terre.*

## III. Loi des aires.

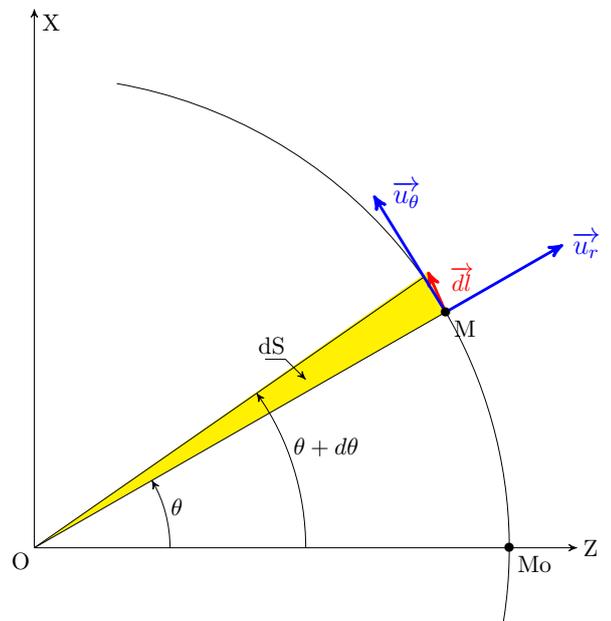
Maintenant que nous avons montré que la trajectoire est plane, nous pouvons repérer la position de M par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  conformément au schéma ci-dessous. L'expression du vecteur vitesse est ainsi :

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_\theta$$

L'expression du vecteur moment cinétique en O devient :

$$\vec{L}_O = m \cdot r \cdot \vec{u}_r \wedge \left( \frac{dr}{dt} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_\theta \right) = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_y$$

Le vecteur moment cinétique étant constant, sa norme est une constante. La masse étant évidemment constante, nous obtenons :



$$r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = C : \text{constante du mouvement.}$$

Soit M la position du point matériel à la date t et  $\vec{dl}$  le déplacement élémentaire du point matériel entre les instants de date t et (t+dt). Ce vecteur a pour expression :

$$\vec{dl} = \vec{V} \cdot dt = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta$$

L'aire élémentaire dS balayée par le vecteur position entre les instants de dates t et (t+dt) est la demie norme du produit vectoriel  $\vec{OM} \wedge \vec{dl}$ .

$$dS = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{OM} \wedge \vec{dl}\| = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot d\theta$$

On définit alors la vitesse aréolaire A :

$$A = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \cdot C$$

**On vient donc ainsi de démontrer la loi des aires :** la vitesse aréolaire étant une constante, les aires balayées par le vecteur position pendant des durées successives égales sont égales.

*Remarque :* la vitesse aréolaire s'exprime simplement en fonction de C ; C est souvent appelée : constante des aires.

**Animation : visualisation de la loi des aires :** En cliquant sur un des deux liens ci-dessous (format .avi ou .mp4 en fonction de votre matériel) il est possible d'obtenir une animation illustrant cette loi des aires. Les positions successives et les vecteurs positions sont représentés à intervalles de temps successifs égaux à T/40. On remarque que la vitesse est d'autant plus faible que la distance au foyer est grande : elle est maximale au périastre et minimale à l'apoastre. Les aires des 40 secteurs successifs sont égales chacune au quarantième de l'aire délimitée par l'ellipse.

**Visualisation loi des aires ; format .avi** **Visualisation loi des aires ; format .mp4**

## IV. Formules de Binet.

Il s'agit d'exprimer la vitesse et l'accélération du point M en fonction des dérivées de r par rapport à  $\theta$ , le temps disparaissant explicitement des expressions en remplaçant  $\frac{d\theta}{dt}$  par  $\frac{C}{r^2}$ .

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{C}{r^2} = -C \cdot \frac{d(1/r)}{d\theta}$$

$$r \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r}$$

D'où la première formule de Binet :

$$\vec{V} = C \cdot \left( -\frac{d(1/r)}{d\theta} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \cdot \vec{u}_\theta \right)$$

*Remarque :* cette relation est souvent utilisée pour exprimer l'énergie cinétique du point matériel :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot C^2 \cdot \left[ \left( \frac{d(1/r)}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right]$$

On obtient le vecteur accélération en dérivant par rapport au temps l'expression de la vitesse. Dans la mesure où la force est centrale, la seconde loi de Newton impose que le vecteur accélération ait seulement une composante suivant  $\vec{u}_r$ . Les termes suivant  $\vec{u}_\theta$  doivent nécessairement s'annuler entre eux et ne vont pas être explicités dans la démonstration ci-dessous.

$$\frac{d \left( \frac{d(1/r)}{d\theta} \cdot \vec{u}_r \right)}{dt} = \frac{d \left( \frac{d(1/r)}{d\theta} \right)}{dt} \cdot \vec{u}_r + \text{terme colinéaire à } \frac{d\vec{u}_r}{dt} \text{ soit colinéaire à } \vec{u}_\theta$$

Nous l'avons montré pour la vitesse : dériver par rapport à  $t$  revient à dériver par rapport à  $\vartheta$  tout en multipliant par  $\frac{C}{r^2}$  :

$$\frac{d\left(\frac{d(1/r)}{d\theta}\right)}{dt} \cdot \vec{u}_r = \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} \cdot \frac{C}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r} \cdot \vec{u}_\theta\right)}{dt} = \text{terme colinéaire à } \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_r = -\frac{C}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Au final, en ne conservant que les termes colinéaires à  $\vec{u}_r$ , on obtient la seconde formule de Binet :

$$\vec{a} = -\frac{C^2}{r^2} \cdot \left( \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{u}_r$$

## V. Cas particuliers des forces centrales gravitationnelles et électriques.

### V.1. Les constantes du mouvement.

Nous allons maintenant nous limiter aux forces centrales telles que :

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} \text{ avec } k : \text{ constante}$$

La source d'un tel champ de force peut être une distribution de matière à symétrie sphérique de masse totale  $M_t$  dont le centre est le point  $O$  ; par exemple : un astre dont la répartition de masse est à symétrie sphérique. Si on néglige l'influence de l'aplatissement de la terre à ses pôles et l'influences des autres astres du système solaire, cela peut s'appliquer à l'étude des satellites de la terre dans un repère géocentrique. Cela peut aussi s'appliquer à l'étude d'une planète autour du soleil dans un repère héliocentrique si on néglige l'influence des autres planètes du système solaire. . .

Dans ce cas :  $k = G \cdot M_t \cdot m$  selon la loi de Newton sur la gravitation.

La source peut aussi être une distribution de charges électriques à symétrie sphérique dont le centre est  $O$  et la charge totale  $Q_t$  ; par exemple : une boule uniformément chargée en volume, une boule uniformément chargée en surface, une charge quasi ponctuelle. . . Si  $q$  désigne la charge portée par la particule ponctuelle de masse  $m$ , supposée toujours à l'extérieur de la source, on obtient , selon la loi de Coulomb :

$$k = -\frac{Q_t \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$$

Dans ces cas, l'énergie potentielle vérifie la relation :

$$\frac{dE_p}{dr} = -f(r) = \frac{k}{r^2}$$

Remarque : les problèmes sur les forces centrales faisant beaucoup plus souvent référence aux forces de gravitation, nous poserons par défaut :

$$k = G \cdot M_t \cdot m$$

Si un problème fait intervenir la force électrostatique plutôt que la force de gravitation, il conviendra de remplacer  $G \cdot M_t \cdot m$  par  $-\frac{Q_t \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$  ou  $G \cdot M_t$  par  $-\frac{Q_t}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$ .

$$E_p = -\frac{G \cdot M_t \cdot m}{r}$$

*Remarque : on choisit arbitrairement la constante d'intégration nulle, ce qui est équivalent à choisir le niveau d'énergie potentielle nulle à l'infini.*

**Au cours du mouvement de la masse ponctuelle, nous avons donc deux grandeurs qui restent constantes au cours du temps :**

\* **Le moment cinétique en O** ou plus simplement, l'expression de la constante des aires :

$$C = r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

\* **L'énergie mécanique** dont l'expression peut s'écrire :

$$Em = \frac{1}{2} \cdot m \cdot C^2 \cdot \left[ \left( \frac{d(1/r)}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right] - \frac{G \cdot M_t \cdot m}{r}$$

## V.2. Les trajectoires possibles.

Montrons d'abord que la trajectoire est nécessairement une conique dont O est un foyer. La seconde loi de Newton conduit à :

$$m \cdot \vec{a} = -m \cdot \frac{C^2}{r^2} \cdot \left( \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{u}_r = -\frac{G \cdot M_t \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Après simplification, nous sommes amenés à résoudre une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{G \cdot M_t}{C^2}$$

Solution particulière :  $\frac{1}{r_p} = \frac{G \cdot M_t}{C^2}$  ;

Solution de l'équation homogène (solution si terme de droite nul) :  $\frac{1}{r_h} = B \cdot \cos(\theta - \varphi)$  avec B et  $\varphi$  : constantes. La solution générale est la somme de ces deux solutions :

$$\frac{1}{r} = B \cdot \cos(\theta - \varphi) + \frac{G \cdot M_t}{C^2} = \frac{1 + \frac{C^2 \cdot B}{G \cdot M_t} \cdot \cos(\theta - \varphi)}{\frac{C^2}{G \cdot M_t}}$$

Il est toujours possible de choisir  $B > 0$ , le signe étant ajusté en fonction des conditions initiales grâce à la variable  $\varphi$ .

On pose alors :

$$\frac{C^2}{G \cdot M_t} = p : \text{paramètre de la trajectoire ;}$$

$$\frac{C^2 \cdot B}{G \cdot M_t} = e : \text{excentricité de la trajectoire.}$$

L'équation polaire est alors de la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta - \varphi)}$$

Nous obtenons bien l'équation polaire d'une conique. L'angle  $\varphi$  représente l'angle entre l'axe (Oz) et la directrice de la conique.

## V.3. Énergie mécanique du point matériel M.

$$\frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{e}{p} \cdot \sin(\theta - \varphi)$$

L'expression de l'énergie mécanique déjà démontrée devient :

$$Em = \frac{m \cdot C^2}{2 \cdot p^2} \cdot [e^2 \cdot \sin^2(\theta - \varphi) + 1 + e^2 \cdot \cos^2(\theta - \varphi) + 2 \cdot e \cdot \cos(\theta - \varphi)] - \frac{G \cdot M_t \cdot m}{p} \cdot [1 + e \cdot \cos(\theta - \varphi)]$$

On remarque :

$$\frac{G \cdot M_t \cdot m}{p} = m \cdot \left( \frac{G \cdot M_t}{C} \right)^2 \quad ; \quad \frac{m \cdot C^2}{p^2} = m \cdot \left( \frac{G \cdot M_t}{C} \right)^2$$

et :

$$\cos^2(\theta - \varphi) + \sin^2(\theta - \varphi) = 1$$

D'où l'expression générale de l'énergie :

$$Em = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left( \frac{G \cdot M_t}{C} \right)^2 (e^2 - 1)$$

*Remarque : bien évidemment, cette expression ne dépend ni de  $r$  ni de  $\vartheta$  puisque l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.*

On peut ainsi distinguer trois cas :

\*  $E_m > 0$  ; alors  $e > 1$  : la trajectoire est une branche d'hyperbole ;

\*  $E_m = 0$  ; alors  $e = 1$  : la trajectoire est une parabole ;

\*  $E_m < 0$  ; alors  $e < 1$  : la trajectoire est une ellipse dont  $O$  est un des foyers ou un cercle de centre  $O$  dans le cas particulier :  $e = 0$ .

#### V.4. Méthode alternative : exploitation des propriétés du vecteur de Lenz et Runge.

L'étude précédente nécessite l'utilisation des formules de Binet dont la démonstration n'est pas tout à fait évidente. Nous allons voir qu'il est possible de s'en passer mais cela nécessite l'introduction du vecteur de Lenz et Runge, que nous allons noter  $\vec{A}$ , dont l'expression n'est pas vraiment intuitive :

$$\vec{A} = m \cdot \vec{v} \wedge \vec{L}_O - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot \vec{u}_r$$

On s'intéresse d'abord à sa direction. Le vecteur vitesse appartient au plan de la trajectoire. Le vecteur moment cinétique en  $O$  est perpendiculaire à ce plan. Propriété évidente du produit vectoriel : le vecteur  $(\vec{v} \wedge \vec{L}_O)$  appartient au plan de la trajectoire. Le vecteur  $\vec{u}_r$  appartient aussi à ce plan. Conclusion :

**Le vecteur de Lenz et Runge appartient au plan de la trajectoire.**

Démontrons maintenant que ce vecteur est fixe dans ce plan. Il suffit pour cela d'évaluer sa dérivée par rapport au temps sans perdre de vue que le vecteur moment cinétique en  $O$  est un vecteur fixe et sans oublier la relation fondamentale de la dynamique.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= m \cdot \vec{a} \wedge \vec{L}_O - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ \frac{d\vec{A}}{dt} &= -\frac{G \cdot M_t \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r \wedge (m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta) - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Puisque :  $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{u}_\theta$ , on obtient bien :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0} \quad \forall t$$

**Le vecteur de Lenz et Runge est un vecteur fixe appartenant au plan de la trajectoire.**

Pour obtenir simplement l'équation polaire de la trajectoire, il suffit d'expliciter de deux façons différentes le produit scalaire  $(\vec{A} \cdot \vec{OM})$ . En notant comme précédemment  $\theta$  l'angle polaire entre l'axe  $(O,Z)$  et le vecteur position et en notant  $\varphi$  l'angle entre l'axe  $(O,Z)$  et le vecteur  $\vec{A}$ , nous obtenons simplement :

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = \|\vec{A}\| \cdot r \cdot \cos(\theta - \varphi) = A \cdot r \cdot \cos(\theta - \varphi)$$

Nous pouvons aussi calculer ce produit scalaire en remplaçant le vecteur de Lenz par son expression générale :

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = r \cdot \vec{u}_r \cdot (m \cdot \vec{v} \wedge \vec{L}_O) - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot r$$

Un produit mixte est invariant par permutation circulaire des trois vecteurs. Cela donne :

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = \vec{L}_O \cdot (r \cdot \vec{u}_r \wedge m \cdot \vec{v}) - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot r$$

On reconnaît entre parenthèse l'expression du moment cinétique en  $O$ . Ainsi :

$$\vec{A} \cdot \vec{OM} = L_O^2 - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot r$$

En identifiant les deux expressions du produit scalaire :

$$A \cdot r \cdot \cos(\theta - \varphi) = L_O^2 - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot r$$

$$r = \frac{L_O^2}{G \cdot M_t \cdot m^2 + A \cdot \cos(\theta - \varphi)}$$

Soit encore :

$$r = \frac{\frac{L_O^2}{G \cdot M_t \cdot m^2}}{1 + \frac{A}{G \cdot M_t \cdot m^2} \cdot \cos(\theta - \varphi)}$$

On retrouve bien l'équation polaire de la trajectoire obtenu dans le paragraphe V.2 :

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta - \varphi)}$$

avec :

$$\boxed{p = \frac{L_O^2}{G \cdot M_t \cdot m^2} = \frac{C^2}{G \cdot M_t} \quad \text{et} \quad e = \frac{A}{G \cdot M_t \cdot m^2}}$$

Comme déjà écrit au paragraphe V.2, l'angle  $\varphi$ , défini ici comme l'angle entre l'axe (O,z) et le vecteur  $\vec{A}$ , représente l'angle entre l'axe (O,Z) et la directrice de la conique.

**La direction du vecteur  $\vec{A}$  est donc la directrice de la conique. Pour le sens de ce vecteur, on peut dire qu'il est orienté du point O vers le point de la trajectoire au plus près de O.** Dans le cas particulier d'une trajectoire elliptique, il est donc orienté du centre O vers le périastre P (voir figure du paragraphe V.6.1)

Afin d'exprimer l'excentricité  $e$  en fonction des constantes essentielles caractéristiques du mouvement que sont le moment cinétique en O et l'énergie mécanique, on calcule, d'une part  $A^2$ , d'autre part :  $2mE_m L_O^2$ .

$$\vec{A} = m \cdot \left( \dot{r} \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \right) \wedge \left( m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_y \right) - G \cdot M_t \cdot m^2 \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{A} = m^2 \cdot r^2 \cdot \left[ -\dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \left( r \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{G \cdot M_t}{r^2} \right) \cdot \vec{u}_r \right]$$

$$A^2 = m^4 \cdot r^4 \cdot \left[ \left( \dot{r} \cdot \dot{\theta} \right)^2 + \left( r \cdot \dot{\theta}^2 \right)^2 + \left( \frac{G \cdot M_t}{r^2} \right)^2 - 2\dot{\theta}^2 \cdot \frac{G \cdot M_t}{r} \right]$$

$$2mE_m L_O^2 = 2m \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left( \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 \right) - \frac{G \cdot M_t \cdot m}{r} \right] \cdot \left( m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \right)^2$$

$$2mE_m L_O^2 = m^4 \cdot r^4 \cdot \left[ \left( \dot{r} \cdot \dot{\theta} \right)^2 + \left( r \cdot \dot{\theta}^2 \right)^2 + -2\dot{\theta}^2 \cdot \frac{G \cdot M_t}{r} \right]$$

Par comparaison on remarque :

$$\boxed{A^2 = 2mE_m L_O^2 + \left( G \cdot M_t \cdot m^2 \right)^2}$$

Cette relation permet de retrouver la relation entre excentricité, énergie et constante des aires déjà établie au paragraphe V.3.

$$e^2 = \left( \frac{A}{G \cdot M_t \cdot m^2} \right)^2 = 1 + \frac{2mE_m L_O^2}{\left( G \cdot M_t \cdot m^2 \right)^2}$$

$$\boxed{E_m = \frac{G^2 \cdot M_t^2 \cdot m^3}{2L_O^2} \cdot (e^2 - 1) = \frac{1}{2} m \cdot \left( \frac{G \cdot M_t}{C} \right)^2 \cdot (e^2 - 1)}$$

*Remarque : par cette méthode, on évite la démonstration des formules de Binet pour arriver à l'équation polaire de la trajectoire mais l'obtention de l'expression de  $A^2$  est relativement calculatoire. Je ne pense pas que cette méthode soit globalement plus rapide...*

## V.5. Méthode graphique alternative : énergie potentielle effective.

Il s'agit d'une méthode graphique qui permet simplement de façon graphique de déterminer la nature ouverte ou fermée de la trajectoire. Cette méthode à l'avantage d'être moins "calculatoire" que les précédentes mais elle est moins riche en informations; elle ne permet pas en particulier de démontrer que la trajectoire est une conique. On part de l'expression de l'énergie cinétique déduite de la première formule de Binet (§ IV) pour obtenir l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot C^2 \cdot \left( \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \right)^2 + \frac{m \cdot C^2}{2r^2} - \frac{G \cdot M_t \cdot m}{r}$$

La somme des deux derniers termes ne dépend que de  $r$  et est appelée "énergie potentielle effective".

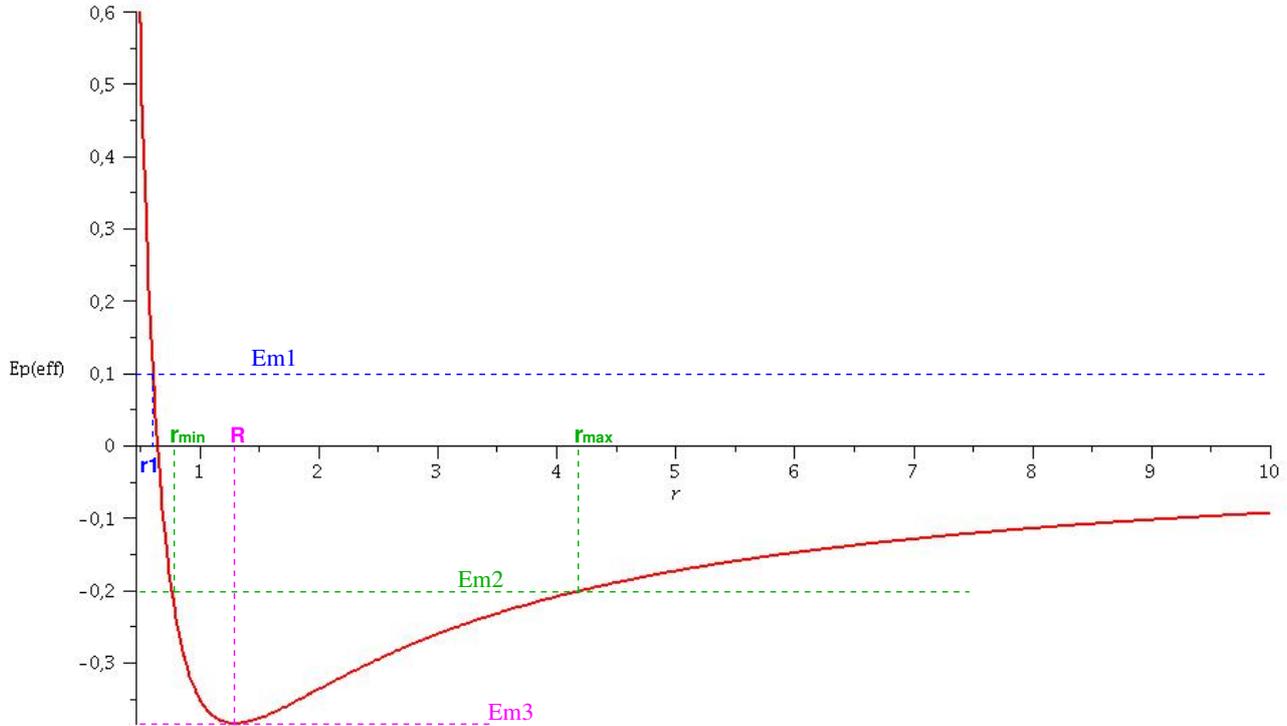
$$E_{p(eff)} = \frac{m \cdot C^2}{2r^2} - \frac{G \cdot M_t \cdot m}{r} = f(r)$$

La dérivée par rapport à r de cette énergie potentielle effective vaut :

$$f'(r) = -\frac{m \cdot C^2}{r^3} + \frac{G \cdot M_t \cdot m}{r^2} = \frac{m}{r^2} \cdot \left( G \cdot M_t - \frac{C^2}{r} \right)$$

Un rapide tableau de variation montre que la courbe représentant les variations en fonction de r de  $E_{p(eff)}$  présente un minimum en  $R = \frac{C^2}{G \cdot M_t}$ . De plus :  $\lim_{r \rightarrow 0} E_{p(eff)} = +\infty$  ;  $\lim_{r \rightarrow \infty} E_{p(eff)} = 0$ .

L'allure de cette courbe est représentée ci-dessous (échelle totalement arbitraire) :



Puisque :

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot C^2 \cdot \left( \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \right)^2 + E_{p(eff)}$$

Nous avons nécessairement :

$$E_m \geq E_{p(eff)}$$

l'égalité correspondant à un extremum de r ou à un mouvement circulaire (r : constante). Sachant que  $E_m$  est une constante du mouvement, il est possible d'étudier qualitativement les variations de r.

**Premier cas :**  $E_m = E_{m1} \geq 0$  : on voit bien graphiquement que r peut varier entre la valeur  $r_1$  telle que :  $E_{m1} = E_{p(eff)}$  et l'infini. La méthode permet une détermination rapide de  $r_1$  mais ne permet pas de démontrer que la trajectoire est une branche d'hyperbole ou une parabole dans le cas particulier  $E_{m1}=0$ .

**Deuxième cas :**  $E_m = E_{m2} < 0$  : r peut varier entre deux valeurs  $r_{min}$  et  $r_{max}$  qui peuvent facilement être déterminées et qui correspondent au périastre et à l'apoastre mais bien sûr : on ne démontre pas ainsi que la trajectoire est une ellipse.

**Troisième cas :**  $E_m = E_{m3}$  où  $E_{m3}$  désigne la valeur minimale de  $E_{p(eff)}$ . Une seule valeur de r est possible : la valeur R qui annule la dérivée  $f'(r)$ . Le mouvement est ainsi circulaire uniforme de rayon R. La valeur du rayon est la valeur de r qui annule  $f'(r)$  :

$$R = \frac{C^2}{G \cdot M_t}$$

Pour un mouvement circulaire, la loi des aires conduit à une vitesse angulaire constante :  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ,  $C = R^2 \cdot \omega = R \cdot V$ . On retrouve l'expression de la vitesse V obtenue classiquement en étudiant directement le mouvement circulaire uniforme :

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot M_t}{R}}$$

**Remarque : cas de la force centrale électrostatique.**

Comme déjà expliqué, il suffit de remplacer  $G \cdot M_t \cdot m$  par  $-\frac{Q_t \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$  dans l'expression de l'énergie potentielle, celle de l'énergie cinétique étant inchangée.

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot C^2 \cdot \left( \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \right)^2 + \frac{m \cdot C^2}{2r^2} + \frac{Q_t \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

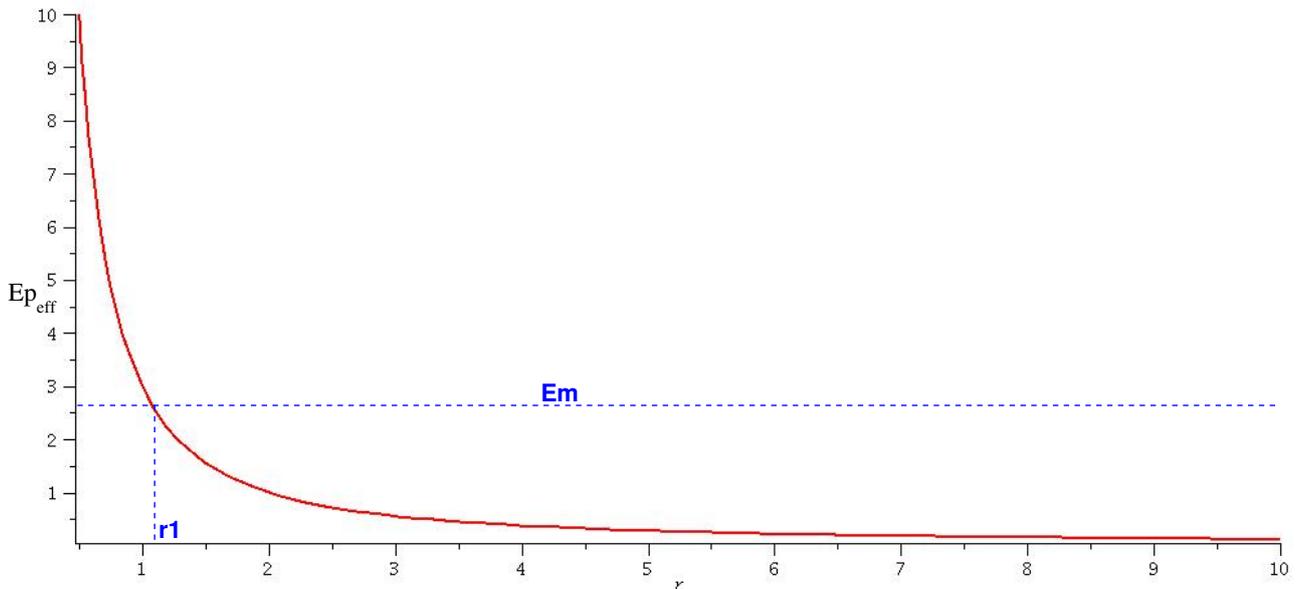
$$E_{p(eff)} = \frac{m \cdot C^2}{2r^2} + \frac{Q_t \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} = f(r)$$

$$f'(r) = -\frac{m \cdot C^2}{r^3} - \frac{Q_t \cdot q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = -\frac{1}{r^2} \cdot \left( \frac{q \cdot Q_t}{4\pi \cdot \epsilon_0} + \frac{m \cdot C^2}{r} \right)$$

On peut envisager deux cas :

**Les deux charges sont de signes différents :** La force électrostatique est attractive, comme l'est la force gravitationnelle dans l'étude antérieure. La courbe représentant les variations de  $E_{p(eff)}$  est analogue à celle étudiée ci-dessus puisque  $q \cdot Q_t < 0$ .

**Les deux charges sont de même signe :** La force électrostatique est répulsive. Puisque :  $q \cdot Q_t > 0$ ;  $f'(r) < 0 \forall r$ . L'énergie potentielle effective décroît de façon monotone en fonction de  $r$ , conformément à la courbe ci-dessous (échelle arbitraire).

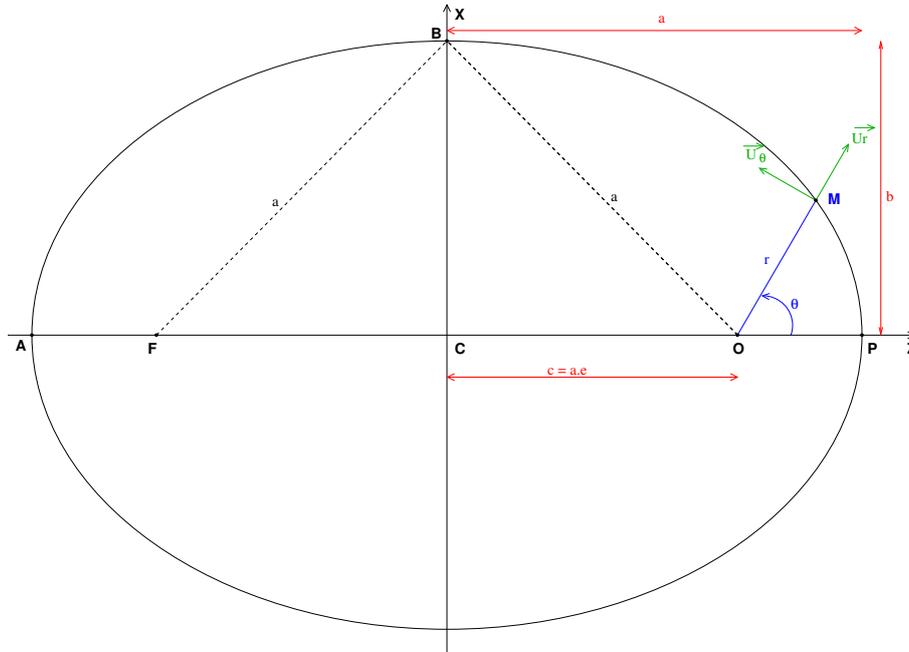


L'énergie mécanique est toujours positive. Selon l'étude faite au paragraphe V.3, la trajectoire est une branche d'hyperbole. Cette étude permet graphiquement d'obtenir la valeur minimale de  $r$  :  $r_1$ .

## V.6. Cas particulier d'une trajectoire elliptique.

### V.6.1. Expression de l'énergie mécanique en fonction de la longueur du demi grand axe.

On s'intéresse maintenant au cas particulier fréquent de la trajectoire elliptique.



En supposant que l'axe (Oz) soit le grand axe de l'ellipse et que la situation  $\vartheta = 0$  corresponde au périastre de la trajectoire, on obtient :  $\varphi = 0$ . D'où l'équation de la trajectoire :

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

La distance de M à O au périastre vaut :  $OP = r_{min} = \frac{p}{1+e}$  ;

La distance de M à O à l'apoastre vaut :  $OA = r_{max} = \frac{p}{1-e}$  ;

La longueur a du demi grand axe vérifie :  $2 \cdot a = r_{max} + r_{min} = \frac{2 \cdot p}{1-e^2}$ .

Donc :

$$e^2 - 1 = -\frac{p}{a} = -\frac{C^2}{G \cdot M_t \cdot a}$$

Cela permet d'obtenir une expression simplifiée de l'énergie mécanique en fonction de a :

$$Em = -\frac{G \cdot M_t \cdot m}{2 \cdot a}$$

*Remarque n° 1 : pour un astre attracteur quelconque, la position la plus proche et la position la plus éloignée du centre attracteur sont respectivement nommées : "périastre" et "apoastre". Si l'astre attracteur est la terre, ces deux mots peuvent être remplacés respectivement par "périgée" et "apogée". Si l'astre attracteur est le soleil, ces deux mots peuvent être remplacés respectivement par "périhélie" et "aphélie".*

*Remarque n° 2 : le cas particulier du cercle correspond à  $e = 0$  ; le rayon de la trajectoire est alors :  $R = p = a$ . D'où l'expression de l'énergie mécanique :  $Em = -\frac{G \cdot M_t \cdot m}{2 \cdot R}$ .*

### V.6.2. Expression de la période de révolution (ou période orbitale).

Soit b la longueur du demi petit axe de l'ellipse. Soit F le second foyer de l'ellipse, c'est à dire le symétrique du foyer O par rapport au centre C de l'ellipse. On démontre que l'ellipse peut se définir géométriquement comme le lieu dans le plan des points M tels que la somme des distances du point M aux deux foyers reste constante :

$$OM + FM = constante = 2a$$

Dans le cas particulier du point B de l'ellipse, cela donne :

$$OB = FB = a$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle (COB) conduit immédiatement à :

$$CO^2 + CB^2 = OB^2 \quad \text{soit :} \quad a^2 \cdot e^2 + b^2 = a^2 \quad \text{soit :} \quad b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}.$$

L'aire de la surface délimitée par l'ellipse vaut ainsi :

$$S = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

Nous avons montré que la vitesse aréolaire  $A = \frac{dS}{dt}$  est une constante égale à  $\frac{C}{2}$ . Dans le cas particulier du mouvement elliptique d'une planète, ce résultat est connu sous le nom de seconde loi de Kepler. La période de révolution, c'est à dire la durée  $T$  nécessaire pour que  $M$  effectue un tour autour du centre attracteur  $O$  est ainsi :

$$T = \frac{S}{A} = \frac{2 \cdot S}{C} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2}}{C}$$

Soit :

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^4 \cdot (1 - e^2)}{C^2}$$

Or, nous avons montré au paragraphe précédent :

$$1 - e^2 = \frac{C^2}{G \cdot M_t \cdot a}$$

Cela permet de simplifier la relation précédente :

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_t} \cdot a^3$$

Le résultat est connu sous le nom de troisième loi de Kepler : pour un même astre attracteur (le soleil par exemple) le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand axe. La période de révolution vaut donc :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M_t}}$$

*Remarque : le cas particulier du mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$  correspond à :  $a = R$  ;  $e = 0$  ; la période de révolution a donc pour expression :*

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M_t}}$$

### V.6.3. Expression de la vitesse du point $M$ en fonction de la distance au centre attracteur $O$ .

Il suffit de reprendre l'expression de l'énergie mécanique :

$$Em = Ec + Ep$$

$$-\frac{G \cdot M_t \cdot m}{2a} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{G \cdot M_t \cdot m}{r}$$

$$V^2 = G \cdot M_t \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Soit :

$$V = \sqrt{G \cdot M_t \cdot \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

*Remarque n° 1 : on remarque qu'une augmentation de  $r$  diminue la vitesse et vice et versa. Ce résultat s'obtient également à partir de la loi des aires (seconde loi de Kepler).*

*Remarque n° 2 : de la remarque précédente, il résulte que la vitesse maximale  $V_{max}$  est obtenue au périastre et que la vitesse minimale  $V_{min}$  est obtenue à l'apoastre.*

$$r_{max} = \frac{p}{1 - e} = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 - e} = a \cdot (1 + e) \quad r_{min} = \frac{p}{1 + e} = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e} = a \cdot (1 - e)$$

Cela conduit à :

$$V_{min} = \sqrt{G \cdot M_t \cdot \left( \frac{2}{a \cdot (1 + e)} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{G \cdot M_t \cdot (1 - e)}{a \cdot (1 + e)}}$$

$$V_{max} = \sqrt{G \cdot M_t \cdot \left( \frac{2}{a \cdot (1 - e)} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{G \cdot M_t \cdot (1 + e)}{a \cdot (1 - e)}}$$

*Remarque n° 3 : le cas particulier du mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$  correspond à :  $a = R$  ;  $e = 0$  ; la vitesse a donc pour expression :*

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot M_t}{R}}$$

## V.7. Complément : force centrale de perturbation

Dans certaines situations, s'ajoute à la force gravitationnelle des forces de perturbation, d'intensités faibles par rapport à la force gravitationnelles. Elles peuvent être provoquées par le fait que l'astre attracteur ne soit pas parfaitement à symétrie sphérique ainsi que pas la présence d'autres astres plus éloignés. Parfois l'ensemble de ces perturbations peut se modéliser par une force répulsive inversement proportionnelle au cube de la distance :

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{u}_r = \left( -\frac{G \cdot M_t \cdot m}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3} \right) \cdot \vec{u}_r$$

Les généralités sur les mouvements à force centrale conservative restent valides : mouvement plan, validité de la loi des aires, conservation de l'énergie mécanique ... Cependant, lorsque l'énergie mécanique est négative, la trajectoire n'est pas tout à fait fermée. On peut la décrire comme une ellipse dont le grand axe tourne lentement dans le sens rétrograde, comme le montre la simulation ci-dessous :

**[ellipse tournante ; format mp4](#)**

[retour à la page principale](#)