

# ÉTUDE DE QUELQUES GÉNÉRATEURS DE TENSION QUASI-SINUSOÏDALE

**Avertissement :** une large partie de ce document est consacré à l'oscillateur à filtre de Wien. Il est rédigé de façon à être compris par tout étudiant de niveau (bac +1) ou plus, sachant résoudre une équation différentielle du second ordre. La recherche d'un taux de distorsion du signal le plus faible possible par introduction dans le montage de dipôles non linéaires est largement développée. D'autres oscillateurs quasi-sinusoidaux utilisant l'association d'amplificateurs opérationnels (Amplificateurs Linéaires Intégrés) et de filtres passifs sont ensuite présentés. Le critère de Barkhausen est évoqué mais ce document n'a pas la prétention d'être une étude exhaustive des oscillateurs quasi-sinusoidaux. Un supplément concernant les oscillateurs utilisant un simulateur de résistance négative à été ajouté en fin de fichier. Si l'étude des oscillations fait l'objet de nombreux documents sur le net, un point est rarement abordé : l'influence de la permutation des deux entrées de l'ampli. op.. De nombreuses erreurs persistent sur ce point : j'en veux pour preuve cet extrait du problème de CAPES de l'an 2000 : on y relève une erreur sur les bornes d'entrée de l'ampli. op. qui n'a fait l'objet d'aucune rectification :

<http://www.chimix.com/an7/cap7/cap19.htm>

## PARTIE I : OSCILLATEUR À FILTRE DE WIEN.

### 1. Filtre de Wien en régime variable quelconque.

Le schéma du filtre est donné ci-contre. En régime variable quelconque, la loi des nœuds permet d'écrire :

$$i = i_R + i_C = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$$

Addition des tensions :

$$v_s = v + Ri + \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

Soit en dérivant par rapport au temps pour faire disparaître la primitive :

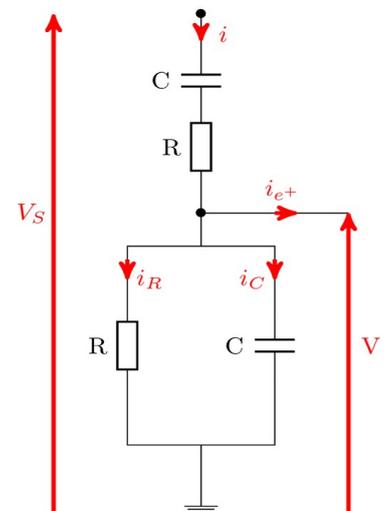
$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv}{dt} + RC \cdot \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = RC \cdot \frac{d^2v}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC}$$

On divise tous les termes par RC puis on pose pour alléger l'écriture :  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  .

L'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 3\omega_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = \omega_0 \cdot \frac{dv_s}{dt}$$

Remarque : si la fonction de transfert du filtre est connue en régime sinusoïdal établi, il est possible de retrouver cette équation différentielle . Admettons l'expression classique de cette fonction de transfert :



$$H = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

En multipliant tous les termes par  $j\omega\omega_0$  :

$$H = \frac{v}{v_s} = \frac{j\omega_0\omega}{3j\omega\omega_0 + (j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

Ce qui conduit à :

$$(j\omega)^2 v + 3j\omega\omega_0 v + \omega_0^2 v = j\omega\omega_0 v_s$$

En régime sinusoïdal établi, multiplier le complexe associé à une grandeur sinusoïdale par  $(j\omega)^n$  permet d'obtenir le complexe associé à la dérivée n<sup>ième</sup> de la grandeur sinusoïdale. L'expression précédente est donc équivalente en régime sinusoïdal à l'équation différentielle déjà obtenue :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 3\omega_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = \omega_0 \cdot \frac{dv_s}{dt}$$

S'il avait fallu démontrer l'expression de la fonction de transfert, cette méthode aurait sûrement été plus longue que la première utilisée et elle est moins rigoureuse puisqu'il faut admettre que le résultat démontré en régime sinusoïdal est valide aussi en régime variable quelconque. Néanmoins, elle se révèle très utile pour des circuits plus complexes...

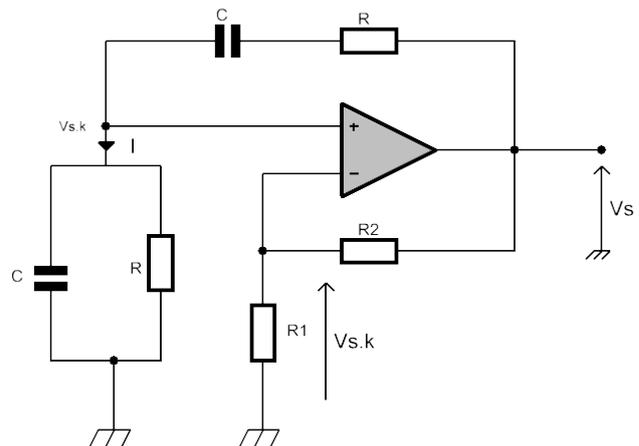
## 2. Oscillateur à filtre de Wien et amplificateur opérationnel.

Le montage est schématisé ci-contre. Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  se comportent en diviseur de tension ; La tension entre l'entrée inverseuse et la masse vaut :

$$V_{E-} = k \cdot v_s \quad \text{avec : } k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Soit :

$$v_s = \beta \cdot v_{E-} \quad \text{avec : } \beta = \frac{1}{k} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$



Imaginons que l'ampli. op. fonctionne en régime linéaire :

$$v_{E-} = v_{E+} = v \quad \text{donc : } v_s = \beta \cdot v$$

En reportant cette valeur de  $v_s$  dans l'équation différentielle imposée par le filtre de Wien, on obtient :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 3\omega_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = \omega_0 \cdot \frac{dv_s}{dt} = \omega_0 \beta \cdot \frac{dv}{dt}$$

Soit :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + (3 - \beta) \omega_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = 0$$

Nous cherchons à obtenir des oscillations sinusoïdales :

$$v = V_m \cdot \cos(\omega t + \phi) .$$

Dans ce cas :

$$\frac{dv}{dt} = -\omega \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = -\omega^2 \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 \cdot v .$$

Par identification avec l'équation différentielle obtenue précédemment :

$$3 - \beta = 0 \quad \text{soit} : R_1 + R_2 = 3 R_1 \quad \text{ou} : R_2 = 2 R_1 \quad \text{ET} : \omega = \omega_0 .$$

La fréquence des oscillations sinusoïdales est donc la fréquence propre du filtre de Wien.

Dans ce cas, la fonction de transfert du filtre est égale à  $H = \frac{1}{3}$  . Les tensions  $v$  et  $v_s$  sont en phase et le rapport de leurs amplitudes est égale à  $\frac{1}{3}$  .

***Nous allons montrer maintenant que cette situation idéale est impossible à obtenir pratiquement de façon rigoureuse.***

### 3. Conditions d'amorçage des oscillations

En dehors des générateurs de tensions continues alimentant l'ampli. op , le circuit ne possède pas de générateur d'entrée puisque justement, le but du circuit est de se comporter en générateur. En absence de tension et de courant à l'instant initial, les équations différentielles précédentes conduisent à  $v = v_s = 0$  à chaque instant. Heureusement, l'ampli. op. n'est pas parfait : même en absence de tension d'entrée, il génère en sortie une très faible tension continue (appelée tension de décalage) qui va permettre l'amorçage. Pour permettre d'obtenir une tension utile d'amplitude non négligeable, il faut donc que l'amplitude de  $v$  croisse au cours du temps en régime transitoire d'amorçage. Cela suppose donc que l'équation différentielle admette, à partir d'un état initial  $v(t=0) = v_0 \neq 0$  une solution qui ne tende pas vers zéro.

Cherchons les solutions générales de cette équation différentielle sous la forme :

$$v = A \cdot e^{r \cdot t} .$$

$r$  est alors solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2 \xi \omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{avec} : \quad \xi = \frac{3 - \beta}{2} = \frac{2 R_1 - R_2}{2 R_1}$$

Le discriminant de cette équation est :  $\Delta = 4 \omega_0^2 (\xi^2 - 1)$  .

**Envisageons d'abord la situation  $\xi > 0$  soit  $\beta < 3$ .**

Trois cas sont possibles alors :

$0 < \xi < 1$  ; alors :  $\Delta < 0$  : les deux racines sont deux complexes conjuguées :

$$r_1 = -\xi \omega_0 + j \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi \omega_0 - j \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} .$$

Les solutions de l'équation différentielles sont de la forme :

$$v = A \cdot e^{-\xi \omega_0 t} \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{et} \quad A \text{ et } \phi : \text{deux constantes} .$$

On obtient des oscillations pseudo périodiques dont l'amplitude décroît exponentiellement vers zéro. Les oscillations ne peuvent s'amorcer.

$\xi = 1$  ; alors  $\Delta = 0$  ; il s'agit du cas particulier du régime critique ; les solutions sont de la forme :

$$v = (A \cdot t + B) e^{-\omega_0 t} .$$

Là encore,  $v$  tend rapidement vers zéro : les oscillations ne peuvent s'amorcer.

$\xi > 1$  ; alors  $\Delta > 0$  : les deux racines de l'équation caractéristique sont deux réels négatifs. La tension  $v$  tend exponentiellement vers zéro ; les oscillations ne peuvent s'amorcer.

**Envisageons maintenant la situation  $\xi < 0$  soit  $\beta > 3$ .**

Là encore, trois cas sont possibles :

$-1 < \xi < 0$  ; alors :  $\Delta < 0$  : les deux racines sont deux complexes conjuguées ; les expressions des racines de l'équation caractéristique et l'expression littérale de  $v = f(t)$  sont les mêmes que celles obtenues pour  $0 > \xi > 1$  mais, dans la mesure où  $\xi$  est maintenant négatif, l'amplitude des oscillation croît exponentiellement au cours du temps : les oscillations peuvent s'amorcer.

$\xi = -1$  ;  $\Delta = 0$  ; il s'agit du cas particulier du régime critique ; les solutions sont de la forme :

$$v = (A \cdot t + B) e^{\omega_0 t} .$$

La tension croît rapidement. Les oscillations peuvent s'amorcer.

$\xi < -1$  ;  $\Delta > 0$  ; les deux racines de l'équation caractéristique sont deux réels positifs. La tension croît exponentiellement ; les oscillations peuvent s'amorcer.

Conclusion : pour que les oscillations puissent s'amorcer, il faut choisir :

$$\beta > 3 \quad \text{soit} \quad R_2 > 2 R_1 .$$

#### 4. Stabilisation de l'amplitude de la tension.

La solution de l'équation différentielle précédente conduit à une amplitude de  $v_s$  qui tend exponentiellement vers l'infini. Cela n'est évidemment pas possible à cause de la saturation de l'ampli. op. ; dès la saturation  $v_s = V_{SAT}$ . Alors :

$\frac{dv_s}{dt} = 0$  ; l'équation différentielle vérifiée par  $v$  obtenue au paragraphe 1) devient :

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dt^2} + 3 \omega_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = \omega_0 \cdot \frac{dv_s}{dt} = 0}$$

Maintenant :  $\xi = 1,5$  ; le discriminant de l'équation caractéristique est positif, les deux racines de l'équation caractéristique sont deux réels négatifs :

$$r_1 = -\xi \omega_0 + \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} \approx -0,38 \omega_0 \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi \omega_0 - \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} \approx -2,62 \omega_0$$

La tension  $v$  décroît exponentiellement en fonction du temps. Puisque, en régime de fonctionnement linéaire de L'ampli. op. nous avons :

$$V_{E.} = v = k \cdot v_s \quad \text{avec : } k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

nous pouvons obtenons deux situations :

**1° cas :**  $|v| < k \cdot V_{sat}$  : l'ampli.op. fonctionne en régime linéaire :  $v$  varie de façon pseudo périodique au cours du temps avec une amplitude qui croît exponentiellement au cours du temps ;

**2° cas :**  $|v| \geq k \cdot V_{sat}$  : l'ampli. op. sature :  $v$  décroît exponentiellement au cours du temps.

On conçoit facilement qu'après un régime transitoire plus ou moins long, l'amplitude  $V_m$  de  $v$  va se stabiliser à une valeur supérieure à  $k \cdot V_{SAT}$  ; la valeur précise est délicate à calculer.

La fréquence des oscillations sera très proche de :

$$f \approx \frac{\omega_0}{4\pi R_1} \cdot \sqrt{4R_1 R_2 - R_2^2} = \frac{\sqrt{4R_1 R_2 - R_2^2}}{4\pi R_1 RC}$$

## 5. Synthèse concernant l'existence d'un régime permanent d'oscillations.

Oscillations possibles pour :

$$R_2 > 2R_1$$

Amplitude des oscillations pour la tension  $v$  : un peu supérieure à :

$$v_m = \frac{R_1 \cdot V_{sat}}{R_1 + R_2}$$

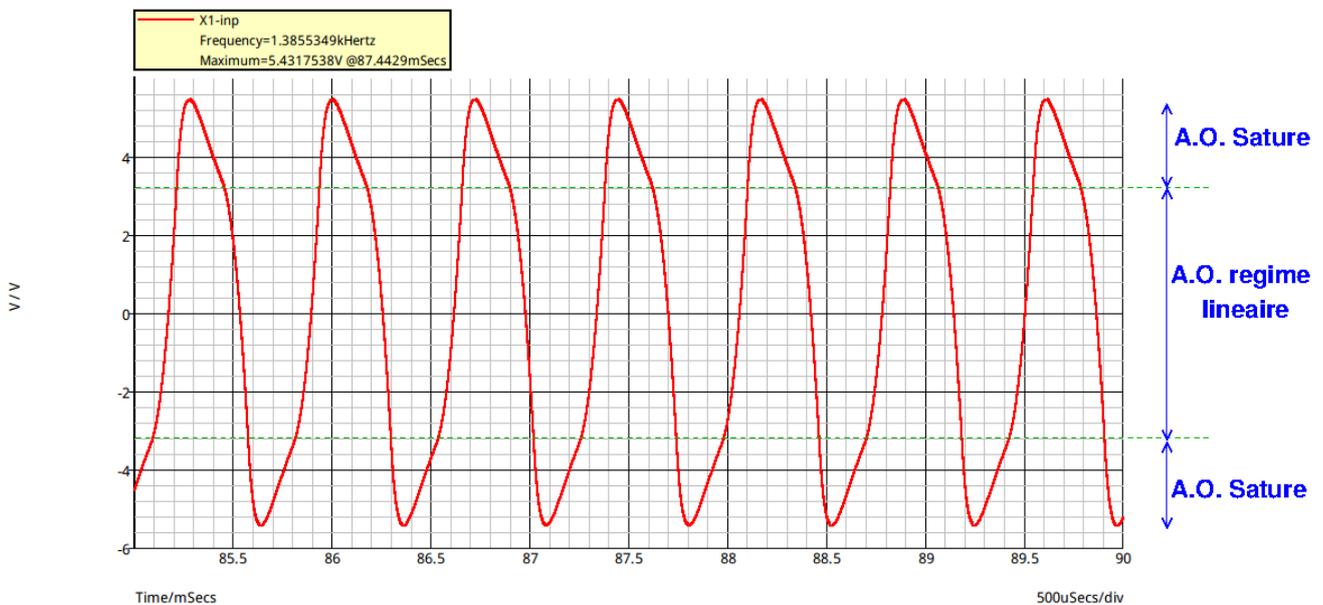
Fréquence des oscillations proche de :

$$f = \frac{\sqrt{4R_1 R_2 - R_2^2}}{4\pi R_1 RC}$$

Pour illustrer ces résultats théoriques, voici une simulation avec :

$R = 10k\Omega$  ;  $C = 10nF$  ;  $R_1 = 22k\Omega$  ;  $R_2 = 3R_1$ .

Nous obtenons bien des oscillations. La formule précédente conduit à une fréquence théorique de 1378Hz quand la simulation conduit à 1385Hz. L'écart n'est que de 0,5 %. En revanche, l'amplitude des oscillations est nettement supérieure à la valeur théorique de  $V_m$  : amplitude pour la simulation de 5,4V alors que  $V_m$  est de l'ordre de 3,6V : la variation de  $v$  une fois la saturation de l'ampli. op. obtenue est assez importante dans la mesure où nous avons choisi une valeur de  $R_2$  nettement supérieure à la valeur minimale permettant d'obtenir des oscillations.



## 6. Obtention d'une tension quasi sinusoïdale.

Pour obtenir une tension  $v$  sinusoïdale, l'équation différentielle devrait pouvoir s'écrire :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot v = 0$$

Ce qui correspond à  $\beta = 3$  soit  $R_2 = 2R_1$ . Cependant, nous avons démontré que

les oscillations ne peuvent s'amorcer que pour  $R_2 > 2R_1$ . Pour s'approcher au mieux d'une tension sinusoïdale, il faut donc choisir une valeur de  $R_2$  supérieure à  $2R_1$  tout en étant très proche de  $2R_1$ .

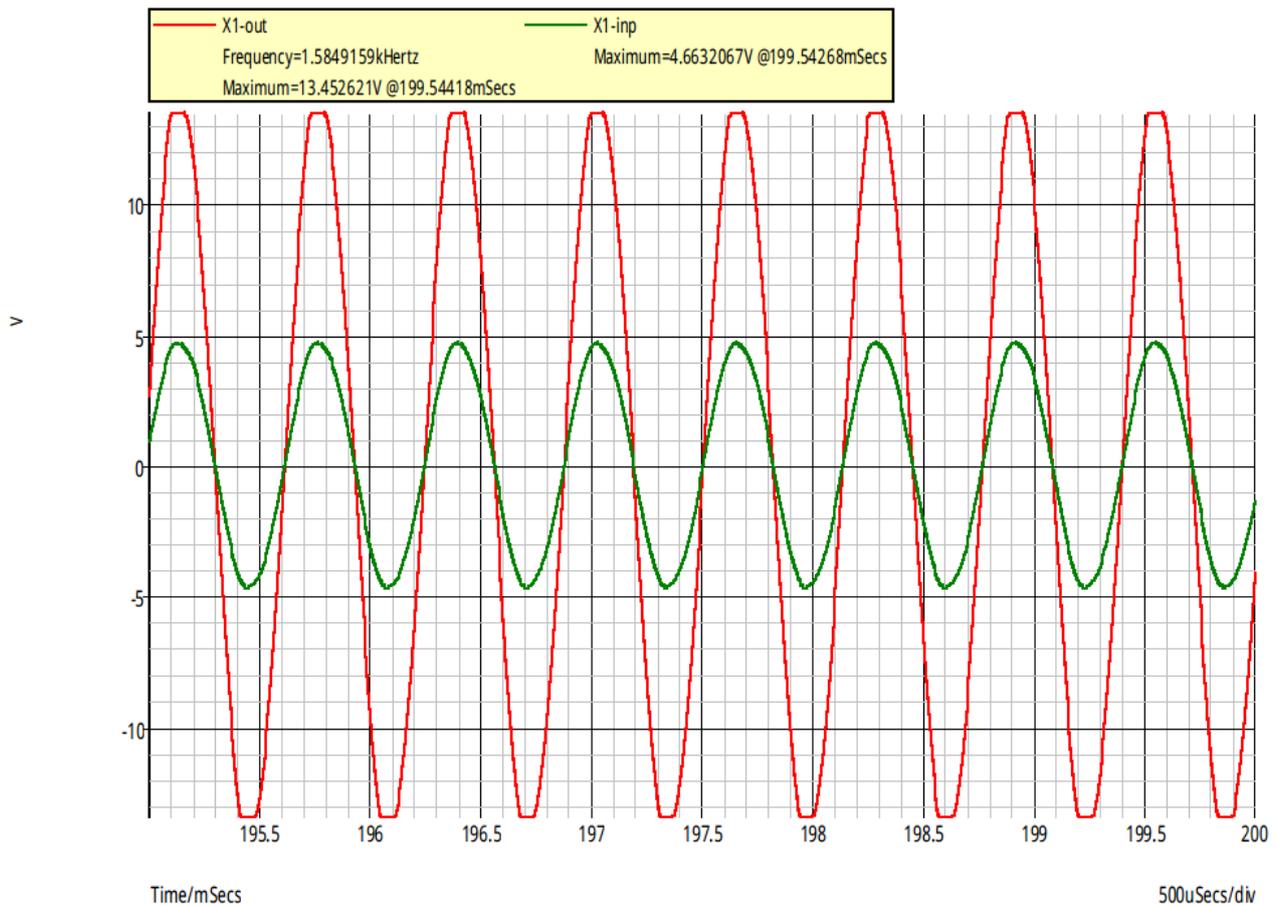
Dans ses conditions, la fréquence est très proche de la fréquence propre du filtre de Wien :

$$f \approx f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

L'amplitude est alors un peu supérieure à  $V_m = \frac{V_{sat}}{3}$ .

On peut remarquer que dans ce cas la fonction de transfert du filtre de Wien est pratiquement égale à  $\frac{1}{3}$ . La tension de sortie  $v_s$  est également quasi sinusoïdale, de même fréquence que  $v$  et en phase avec  $v$ , son amplitude étant  $V_{SAT}$ . Voici les résultats d'une simulation obtenue en conservant les valeurs précédentes sauf celle de  $R_2$ : 45k $\Omega$ .

La fréquence propre vaut ainsi :  $f_0 = 1591\text{Hz}$ . l'écart relatif avec la valeur simulée (1585Hz) est de 0,4 %. Pour une valeur de  $V_{SAT}$  d'environ 13,5V, la théorie précédente prévoit une amplitude un peu supérieure à 4,5V : la valeur simulée est : 4,66V. Il y a bien cohérence !



L'analyse de Fourier de la tension  $v$  montre qu'elle peut être considérée comme la somme d'un fondamental d'amplitude 4,682V et de fréquence  $f = 1585\text{Hz}$  et d'un harmonique de fréquence  $3f$  et d'amplitude 0,0729V, les autres harmoniques étant d'influence négligeable.

Pour apprécier la performance de l'oscillateur à délivrer un signal le plus proche possible du signal sinusoïdal, on définit le taux de distorsion due la tension de la façon suivante :

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}{A_1^2}}$$

où  $A_1$  désigne l'amplitude du fondamental et  $A_2, A_3, \dots$  désignent les amplitudes des harmoniques de rangs 2, 3,...

On obtient ici :

$$d = \sqrt{\frac{0,0729^2}{4,682^2 + 0,0729^2}} \approx 1,56\%$$

Le résultat est moins bon pour la tension de sortie  $v_s$ . Le taux de distorsion est de 2,6 %. Les phases de saturation de l'ampli. op. sont bien visibles et leurs durées ne sont pas négligeables.

Conclusion : le montage peut avec ce type de réglage, être considéré comme un générateur de tension quasi sinusoïdale en ce qui concerne la tension  $v$ . Il présente néanmoins au moins trois inconvénients :

- Les ampli. op. réels sont rarement rigoureusement symétriques : la saturation haute et la saturation basse ne correspondent pas à deux tensions exactement opposées, ce qui rend la tension  $v$  pas tout à fait alternative. Ce défaut n'apparaît pas sur la simulation précédente.

- la tension de sortie ne peut pas être considérée comme sinusoïdale. Il n'est donc pas possible d'utiliser le fait que la sortie de l'ampli. op. se comporte en générateur idéal de tension. Pour alimenter un circuit autre à partir de la tension  $v$ , il faut intercaler entre l'entrée  $E+$  de l'ampli. op. et le circuit récepteur autre, un montage suiveur. Sinon, le fonctionnement du filtre de Wien sera modifié par l'existence du courant débité dans ce circuit récepteur.

-le régime d'oscillation permanent est relativement lent à s'établir. Nous avons montré que, lors de la phase d'amorçage, l'amplitude croît exponentiellement proportionnellement à  $e^{-\xi\omega t}$  avec  $\xi < 0$ . Or, la tension est d'autant plus proche d'une tension sinusoïdale que  $R_2$  est proche de  $2R_1$  donc que  $\xi$  est proche de zéro. Plus la tension est proche d'une tension sinusoïdale, plus ce régime quasi sinusoïdal est lent à s'établir ! Dans le cas étudié précédemment, il faut environ 0,2s pour que le régime quasi sinusoïdal soit établi, ce qui est beaucoup en électronique !

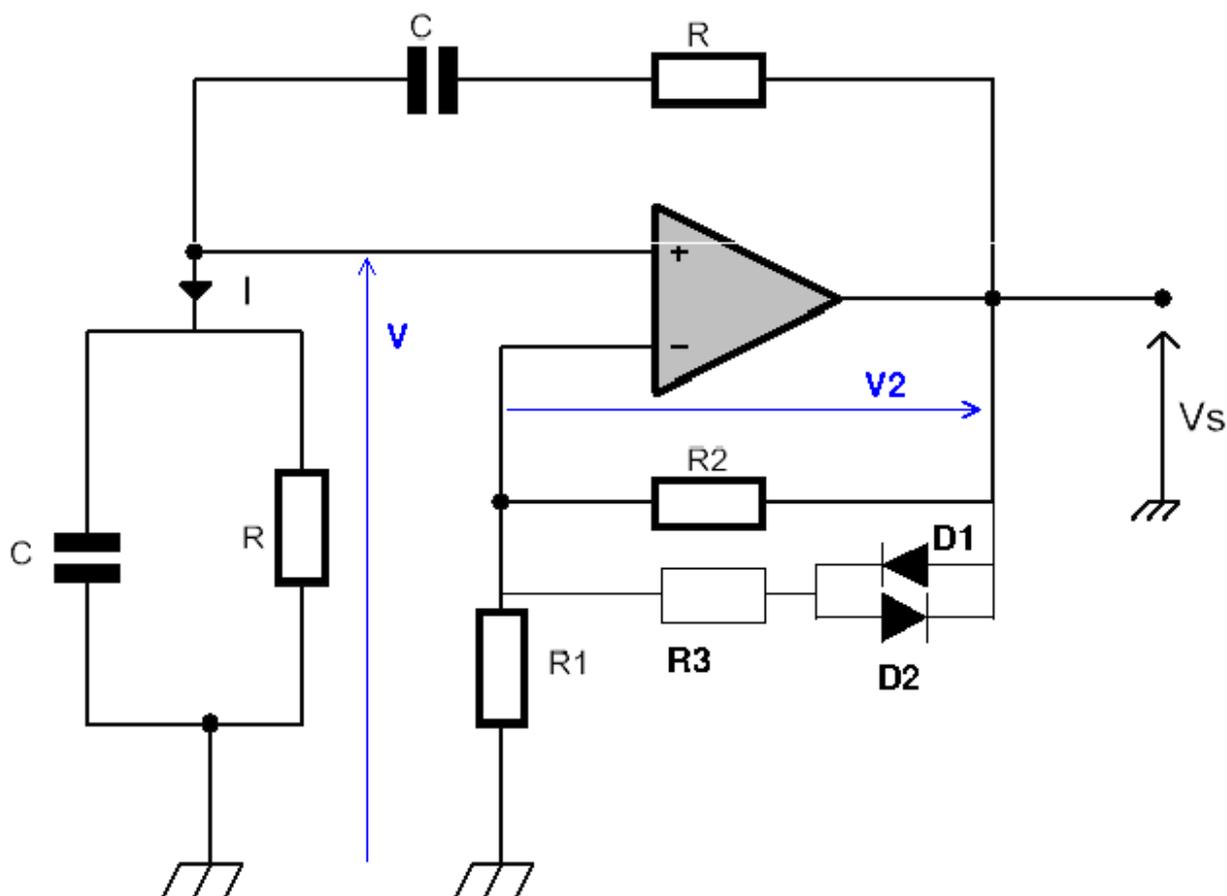
## 7. Améliorations possibles du montage

### 7.1. Comment éviter les inconvénients liés à la dissymétrie de l'ampli. op. ?

Il faut éviter que la limitation de l'amplitude soit obtenue par saturation de l'ampli. op. et faire en sorte que l'ampli. op. fonctionne en permanence en régime linéaire. Plusieurs montages sont possibles. Ils ont cependant tous un point commun : en remplaçant  $R_1$  ou

$R_2$  par un dipôle non linéaire, il s'agit de faire en sorte que le rapport  $\frac{R_2}{R_1}$  des résistances

équivalentes soit supérieur à 2 en phase d'amorçage puis tende vers 2 en régime permanent. Une méthode possible consiste à utiliser deux diodes de redressement branchées « tête-bêche » en série ou en parallèle avec une résistance. Nous allons étudier uniquement le branchement série. Voici le schéma du montage.



Avec :  $R=10\text{k}\Omega$  ;  $C = 10\text{nF}$  ;  $R_1 = 22\text{k}\Omega$  ;  $R_2 = 47\text{k}\Omega (2,136.R_1)$  ;  $R_3 = 330\text{k}\Omega$ . Les diodes D1 et D1 sont des diodes de redressement identiques. Pour simplifier, nous allons linéariser leur caractéristique courant- tension de la façon suivante :

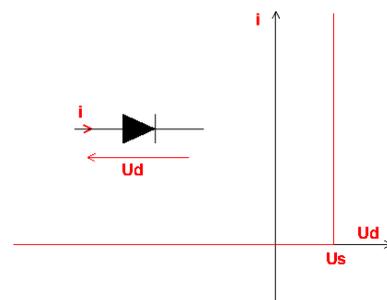
$i=0$  si  $U_d < U_s$  avec  $U_s = 0,7\text{V}$  : tension de seuil ;

$i > 0$  si  $U_d = U_s$ .

**Envisageons d'abord le cas :  $v_s > 0$ .**

L'ampli. op. fonctionnant en régime linéaire :  $V_{E+} = v = V_{E-}$  ;

Donc :  $v_s = v + V_2$  avec  $v > 0$  et  $V_2 > 0$  ; la diode D2 est alors nécessairement bloquée ; elle ne joue aucun rôle dans ce cas : tout se passe comme si D2 était enlevée du circuit.



**Deux situations sont envisageables :**

**Premier cas :** la diode D1 est aussi bloquée ; dans ce cas,  $R_3$  n'est parcourue par aucun courant : la tension à ses bornes est nulle, donc :  $V_2 < U_s$ .

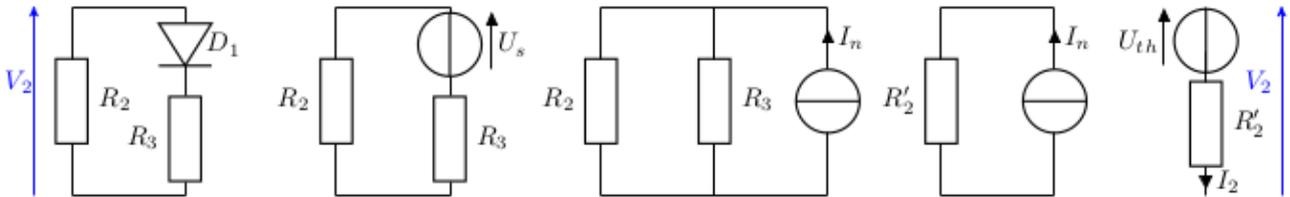
$R_1$  et  $R_2$  sont alors parcourues par le même courant et se comportent en diviseur de tension :

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v_s \quad v = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot v_s$$

En tenant compte de la condition sur la tension de seuil de D1, on obtient la condition de validité des formules précédentes :

$$\frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot v_s < U_s \quad \text{soit :} \quad v_s < \frac{R_1+R_2}{R_2} \cdot U_s$$

**Second cas :** la diode D1 est passante. Dans ce cas, l'ensemble {R<sub>2</sub> , R<sub>3</sub> , D1} est équivalent au circuit suivant :



La diode se comporte comme un générateur idéal de tension branché en opposition. La transformation Thévenin – Norton permet de le remplacer par son générateur de courant équivalent de courant électromoteur :  $I_n = \frac{U_s}{R_3}$  . L'association en parallèle de R<sub>2</sub> et R<sub>3</sub> est

équivalente à une résistance unique :  $R'_2 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \approx 41,14 k\Omega$  .

Ce générateur de courant peut être remplacé par le générateur de tension équivalent de résistance R'<sub>2</sub> et de f.é.m. :  $U_{th} = R'_2 \cdot I_n = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \cdot \frac{U_s}{R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot U_s \approx 0,087 V$  .

L'ensemble {R<sub>1</sub> , R'<sub>2</sub> } se comporte en diviseur de tension vis à vis de la tension (v<sub>s</sub> – U<sub>th</sub>) :

$$v = \frac{R_1}{R_1 + R'_2} \cdot (v_s - U_{th})$$

Nous pouvons résumer la situation de la manière suivante pour v<sub>s</sub> > 0 :

$$\text{si } v_s < \frac{R_1+R_2}{R_2} \cdot U_s \text{ alors : } v = \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot v_s$$

$$\text{si } v_s > \frac{R_1+R_2}{R_2} \cdot U_s \text{ alors : } v = \frac{R_1}{R_1+R'_2} \cdot \left( v_s - \frac{R_2}{R_2+R_3} \cdot U_s \right) .$$

Remarque : nous pouvons vérifier la continuité de v en  $v_s = \frac{R_1+R_2}{R_2} \cdot U_s$  :

Dans ce cas limite, la première expression conduit à :

$$v = \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{(R_1+R_2)}{R_2} \cdot U_s = \frac{R_1}{R_2} \cdot U_s .$$

Dans ce cas limite, la seconde expression conduit bien à la même valeur :

$$v = \frac{R_1}{R_1 + R'_2} \cdot \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) \cdot U_s = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \cdot \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2(R_2 + R_3) - R_2^2}{R_2(R_2 + R_3)} \cdot U_s = \frac{R_1}{R_2} \cdot U_s$$

**Envisageons maintenant le cas :  $v_s < 0$ .**

la diode D1 est alors nécessairement bloquée ; elle ne joue aucun rôle dans ce cas : tout se passe comme si D1 était enlevée du circuit.

**Deux situations sont envisageables :**

**Premier cas :** la diode D2 est aussi bloquée ; dans ce cas,  $R_3$  n'est parcourue par aucun courant : la tension à ses bornes est nulle, donc :  $|V_2| < U_s$ , soit :  $V_2 > -U_s$ .

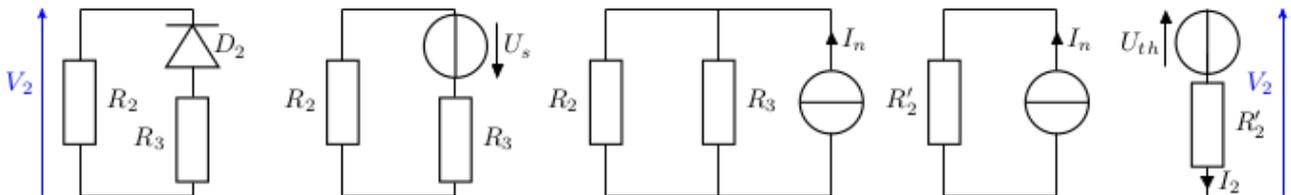
$R_1$  et  $R_2$  sont alors parcourues par le même courant et se comportent en diviseur de tension :

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v_s \quad v = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot v_s$$

En tenant compte de la condition sur la tension de seuil de D1, on obtient la condition de validité des formules précédentes :

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot v_s > -U_s \quad \text{soit : } v_s > -\frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_s$$

**Second cas :** la diode D2 est passante. Dans ce cas, l'ensemble  $\{R_2, R_3, D2\}$  est équivalent au circuit suivant :



La modélisation est la même que dans le cas  $v_s > 0$  à condition de remplacer  $U_s$  par  $(-U_s)$ . Cela donne :

$$\text{si } v_s < -\frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_s \text{ alors : } v = \frac{R_1}{R_1 + R'_2} \cdot \left( v_s + \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot U_s \right)$$

Compte tenu de l'équation différentielle déduite du fonctionnement du filtre de Wien et établie au paragraphe n°1, nous n'avons en fait besoin que de la relation entre  $\frac{dv}{dt}$  et

$\frac{dv_s}{dt}$ . La synthèse des résultats précédents peut se résumer à deux situations différentes :

**Premier cas :**

$$|v_s| < \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_s \quad \text{et} : \quad |v| < \frac{R_1}{R_2} \cdot U_s \quad \text{alors} : \quad \frac{dv_s}{dt} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{dv}{dt} = \beta \cdot \frac{dv}{dt}$$

**Second cas :**

$$|v_s| \geq \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_s \quad \text{et} : \quad |v| \geq \frac{R_1}{R_2} \cdot U_s \quad \text{alors} : \quad \frac{dv_s}{dt} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{dv}{dt} = \beta' \cdot \frac{dv}{dt}$$

Avec :

$$\beta = \frac{22 + 47}{22} \approx 3,14 \quad \text{et} : \quad \beta' = \frac{22 + 41,14}{22} \approx 2,87$$

Dans le premier cas, l'équation différentielle vérifiée par v s'écrit :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + (3 - \beta) \omega_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = 0 \quad \text{avec} : \quad \beta > 3$$

Si comme précédemment, on pose :  $\xi = \frac{3 - \beta}{2} \approx -0,068$

Cette situation a déjà été étudiée : on obtient un régime pseudo périodique dont l'amplitude augmente exponentiellement au cours du temps :

$$v = A \cdot e^{-\xi \omega_0 t} \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec} : \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{et} : \quad A \text{ et } \phi : \text{deux constantes} .$$

Dans le second cas, l'équation différentielle vérifiée par v s'écrit :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + (3 - \beta') \omega_0 \cdot \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 \cdot v = 0 \quad \text{avec} : \quad \beta' < 3 .$$

Posons :

$$\xi' = \frac{3 - \beta'}{2} \approx 0,065 .$$

$\xi$  étant toujours inférieur à l'unité, on obtiens encore un régime pseudo périodique mais son amplitude décroît exponentiellement au cours du temps :

$$v = A' \cdot e^{-\xi' \omega_0 t} \cdot \cos(\omega' t + \phi') \quad \text{avec} : \quad \omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \xi'^2} \quad \text{et} : \quad A' \text{ et } \phi' : \text{deux constantes} .$$

Tant que  $|v| < \frac{R_1}{R_2} \cdot U_s$  l'amplitude de v augmente exponentiellement au cours du temps ; si

$|v| \geq \frac{R_1}{R_2} \cdot U_s$  , l'amplitude de v décroît exponentiellement. Après un régime transitoire,

l'amplitude de v va donc se stabiliser à une valeur un peu supérieure mais très proche de  $\frac{R_1}{R_2} \cdot U_s$  . La fréquence d'oscillation sera celle déjà exprimée :

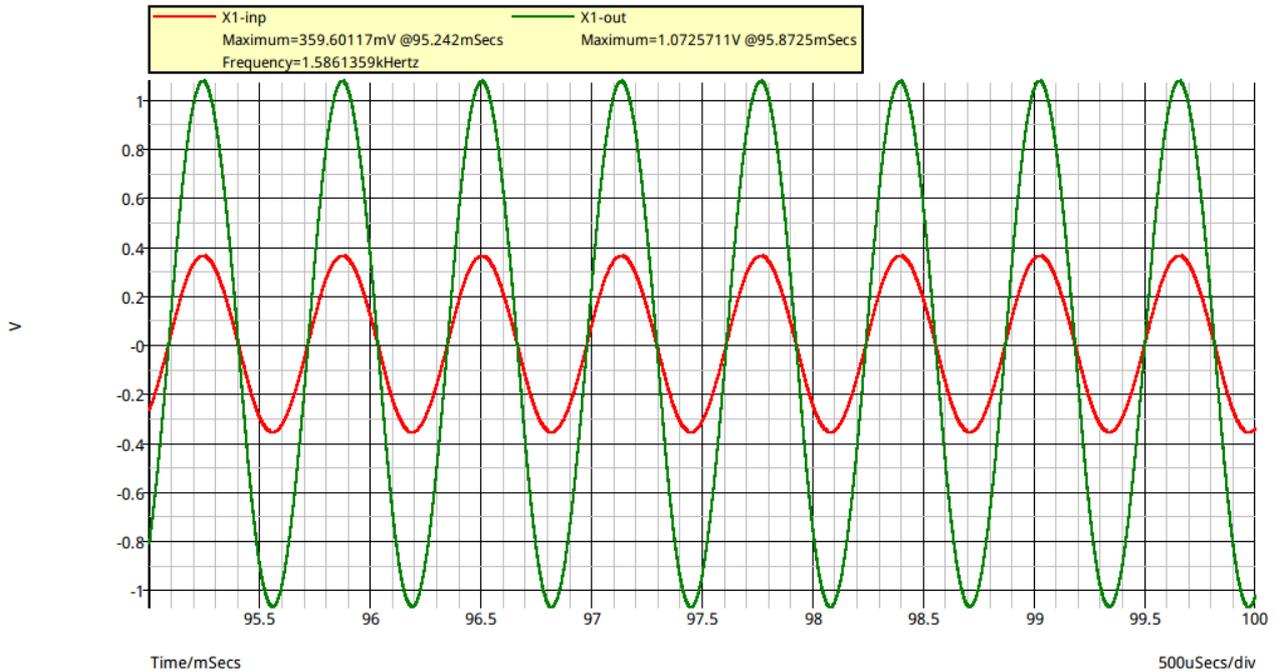
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{\sqrt{4 R_1 R_2 - R_2^2}}{4\pi R_1 RC} .$$

Cette fréquence étant très proche de la fréquence propre du filtre de Wien (  $\xi^2 \ll 1$  ) la tension de sortie  $v_s$  sera en phase avec v, son amplitude étant environ trois plus grande.

En fait, cette amplitude sera supérieure tout en étant très proche de :  $V_m = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot U_s$  .

Cela conduit aux valeurs numériques suivantes :

fréquence :  $f \approx 1588 \text{ Hz}$  ; amplitude de  $v$  :  $v_{\max} \approx 328 \text{ mV}$  ; amplitude de  $V_S$  :  $V_m \approx 1,03 \text{ V}$  .  
 Voici le résultat de la simulation :



L'accord sur la fréquence est excellent. Pour les amplitudes, les valeurs simulées sont comme prévue un peu supérieures aux valeurs calculées. Il faut dire que la caractéristique réelle des diodes de redressement n'est pas aussi simple que celle utilisée ici...

On remarque surtout que la présence des diodes et de  $R_3$  améliore très sensiblement le caractère quasi sinusoïdal de  $v_S$ . L'analyse de Fourier de cette tension montre qu'au fondamental de fréquence et d'amplitude 1,078V, se superpose une harmonique de fréquence  $3f$  et d'amplitude égale seulement à 0,012V ; les autres harmoniques sont d'amplitudes totalement négligeables.

Le taux de distorsion de la tension  $v_S$  vaut :

$$d = \sqrt{\frac{0,012^2}{1,078^2 + 0,012^2}} \approx 1,1\% .$$

Ce montage fait mieux sur la tension  $v_S$  que ne le fait le premier montage sur la tension  $v$ . Ici le taux de distorsion sur  $v$  est de 0,8 %. Cette faible distorsion est favorisée par le fait que les valeurs de  $\xi$  et  $\xi'$  sont deux valeurs de sensiblement même valeurs absolues et assez proches l'une de l'autre. Dans le premier montage, nous avons  $\xi = -0,023$  et  $\xi' = 1,5$  !

Autre intérêt pratique : ce montage permet d'utiliser des valeurs de  $R_2$  plus élevée : 47k $\Omega$  au lieu de 45k $\Omega$  : la valeur absolue de  $\xi$  est plus grande sans que ne soit affecté le caractère quasi sinusoïdal des tensions : cela réduit sensiblement la durée du régime transitoire : environ 70ms avec ce montage ; environ 200ms avec le précédent.

## 7.2 Comment minimiser le facteur de distorsion.

Il s'agit d'obtenir des oscillations purement sinusoïdales avec un dispositif permettant de s'amorcer de lui-même. Pour obtenir un tel résultat, il faut imaginer un dispositif qui cor-

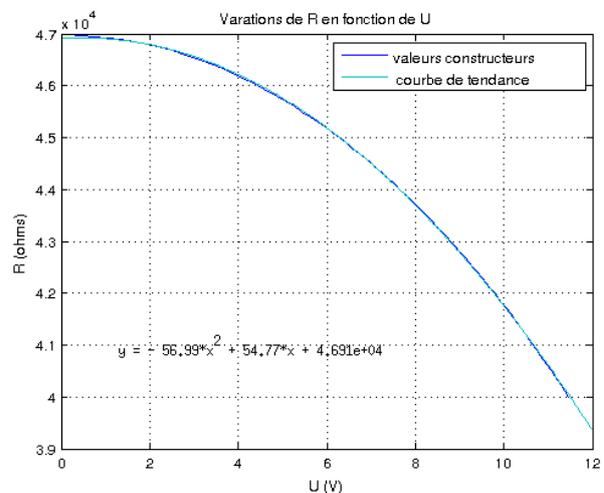
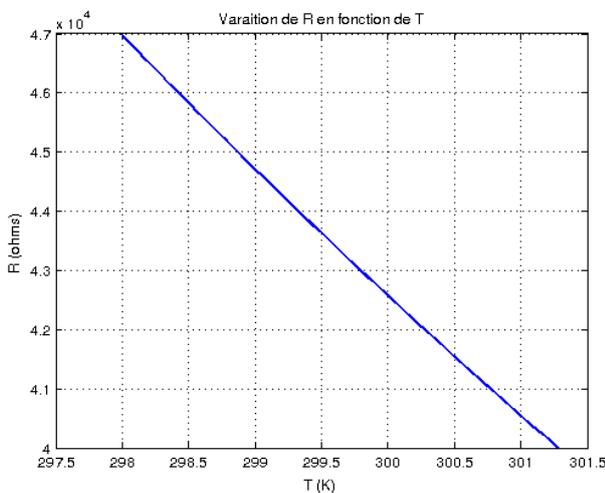
responde à  $\frac{R_2}{R_1} > 2$  pendant la phase d'amorçage puis à  $\frac{R_2}{R_1} = 2$  en régime permanent.

Cela est possible en revenant au montage basique décrit au paragraphe 2) en remplaçant la résistance  $R_2$  par une thermistance CTN c'est à dire un conducteur dont la résistance

décroît exponentiellement avec la température.

Le principe est simple. Choisissons :  $R_1 = 23\text{k}\Omega$  et une thermistance dont la résistance à température ambiante vaut :  $R_2 = 47\text{k}\Omega$ . L'amorçage des oscillation est possible. Au fur et à mesure que l'amplitude de la tension  $V_s$  augmente, la puissance dissipée par effet Joule augmente, la température de la thermistance augmente, sa résistance  $R_2$  diminue. On obtient donc une stabilisation de l'amplitude de la tension  $V_s$  pour une résistance de la thermistance égale à  $R_2 = 2R_1 = 46\text{k}\Omega$ . Dans ce cas, l'amplitude est stable et le coefficient  $\beta$  précédemment introduit vaut exactement 3 : les oscillations sont purement sinusoïdales.

Voici l'étude réalisée avec une CTN 642 6.473 sur une place de température faible :  $3,5^\circ\text{C}$  seulement. On remarque que la courbe  $R = f(U)$  peut être modélisée en excellente approximation par une branche de parabole d'équation :  $R_2 = 47.10^3 + 54,77.U - 56,99.U^2$  avec  $R_2$  en ohms et  $U$  en volts.



La stabilisation de l'amplitude se fait pour  $R_2 = 46\text{k}\Omega$  soit pour une tension aux bornes de la thermistance solution de l'équation :

$$10^4 + 54,77 \cdot U - 56,99 \cdot U^2 = 0 \quad .$$

La solution physiquement acceptable à cette équation est :  $U = 4,70\text{V}$ .

Attention ! La caractéristique précédente à été obtenue avec une tension  $U$  continue alors que la tension aux bornes de  $R_2$  est sinusoïdale en régime permanent. La tension sinusoïdale doit produire le même échauffement de la thermistance que la tension continue :  $U$  est donc la valeur efficace de cette tension dont l'amplitude est donc :

$$V_{2m} = U \cdot \sqrt{2} = 4,70 \cdot \sqrt{2} \approx 6,65 \text{ V} \quad .$$

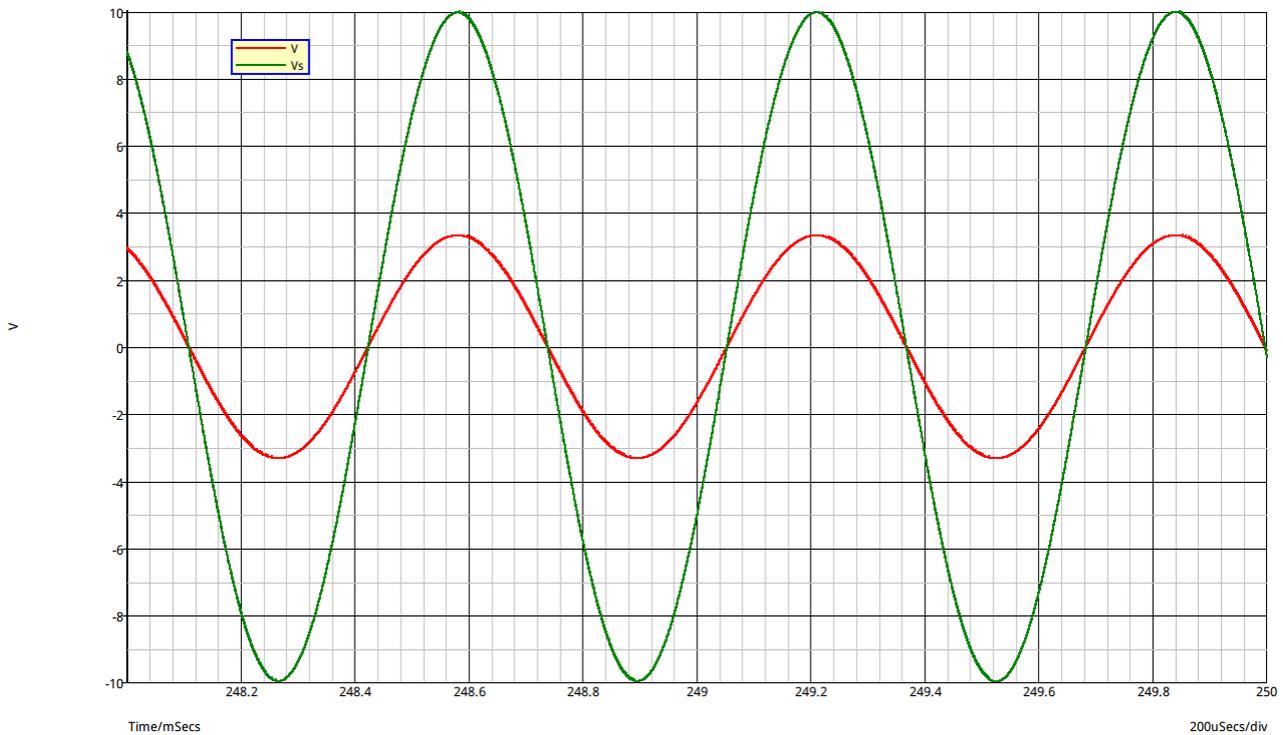
Nous avons déjà montré :  $V_{2m} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_{sm} = \frac{2}{3} \cdot V_{sm}$  . On en déduit les valeurs théoriques des amplitudes des tensions  $v$  et  $v_s$  :

$$V_{sm} = \frac{3}{2} \cdot V_{2m} \approx 9,97 \text{ V} \quad \text{et} : \quad v_{max} = \frac{V_{sm}}{3} \approx 3,32 \text{ V} \quad .$$

La fréquence théorique est la fréquence propre du filtre de Wien :

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \approx 1591 \text{ Hz} .$$

Voici le résultat de la simulation :



La concordance est remarquable : le logiciel de simulation conduit à :

$$V_{sm} = 9,98 \text{ V} \quad ; \quad v_{max} = 3,33 \text{ V} \quad ; \quad f = 1588 \text{ Hz} .$$

Taux de distorsion :  $d = 0,001 \%$ .

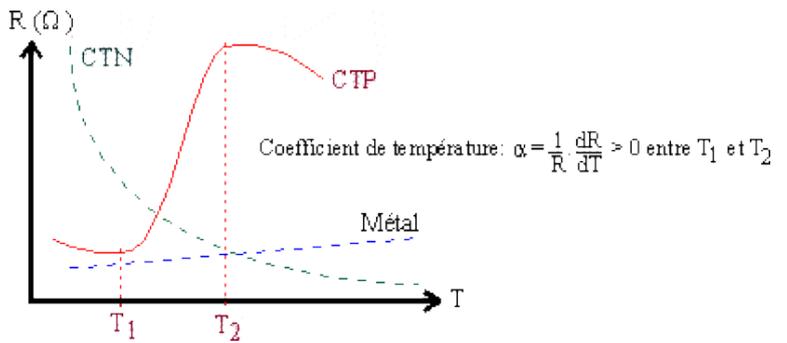
Il s'agit, et de loin, du montage qui conduit au plus faible taux de distorsion. Ce montage présente cependant un inconvénient. La valeur de  $R_2$  dépend assez fortement de la température ambiante. L'amplitude des oscillations va donc dépendre de la température ambiante, fixée précédemment à  $25^\circ\text{C}$ . Cela n'est pas trop gênant : on peut toujours installer en sortie un système de potentiomètre et d'amplificateur permettant de régler l'amplitude. Les variations importantes de températures sont plus ennuyeuses : une température ambiante trop forte peut rendre la valeur initiale de  $R_2$  supérieure à  $2R_1$  rendant l'amorçage impossible ; inversement, une température ambiante trop faible peut rendre la valeur initiale de  $R_2$  tellement supérieure à  $2R_1$  que l'augmentation de l'amplitude de  $V_s$  jusqu'à saturation de l'ampli. op. ne suffit pas à abaisser cette résistance à la valeur  $2R_1$ . On retombe alors sur le fonctionnement décrit au paragraphe 6 qui n'est pas vraiment satisfaisant. Il est donc prudent d'utiliser pour  $R_1$  une résistance réglable autour de la valeur  $22\text{k}\Omega$ .

### 7.3. Montage alternatif.

L'objectif consistant à obtenir  $\frac{R_2}{R_1} > 2$  pendant la phase d'amorçage puis  $\frac{R_2}{R_1} = 2$  en régime permanent a été obtenu précédemment en diminuant la valeur de  $R_2$  au cours de la phase d'amorçage. Une autre méthode consiste à augmenter  $R_1$  au cours de cette phase à partir d'une valeur initiale inférieure à  $\frac{R_2}{2}$ . Pour cela, il faut disposer d'un dipôle dont

la résistance augmente en fonction de la tension  $U$  à ses bornes. Les thermistances à coefficient de température positif

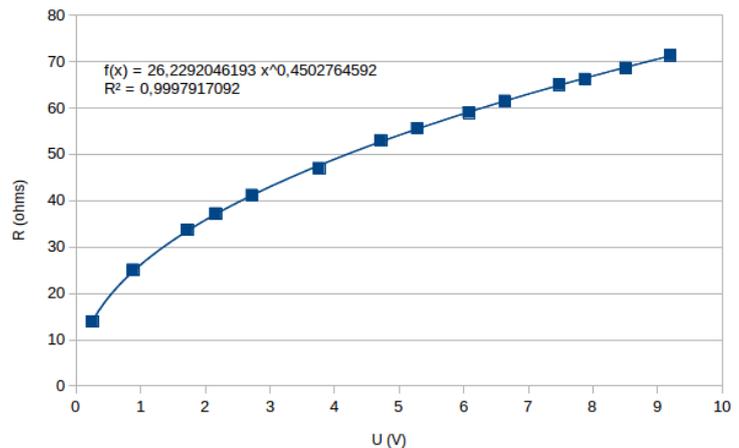
(CTP) ont cette propriété (voir courbes ci-contre). Leur utilisation est cependant malaisée : le domaine de température  $[T_1, T_2]$  tel que le coefficient de température est positif correspond à des valeurs trop élevées : 80°C et plus. On peut aussi



imaginer d'utiliser une lampe à incandescence ; la résistance du filament augmente en fonction de la température, donc en fonction de la tension  $U$  appliquée (voir la caractéristique d'une ampoule type « lampe de poche ». L'usage d'une telle ampoule amène plusieurs difficultés.

Caractéristique d'une lampe à incandescence

$$R = f(U)$$



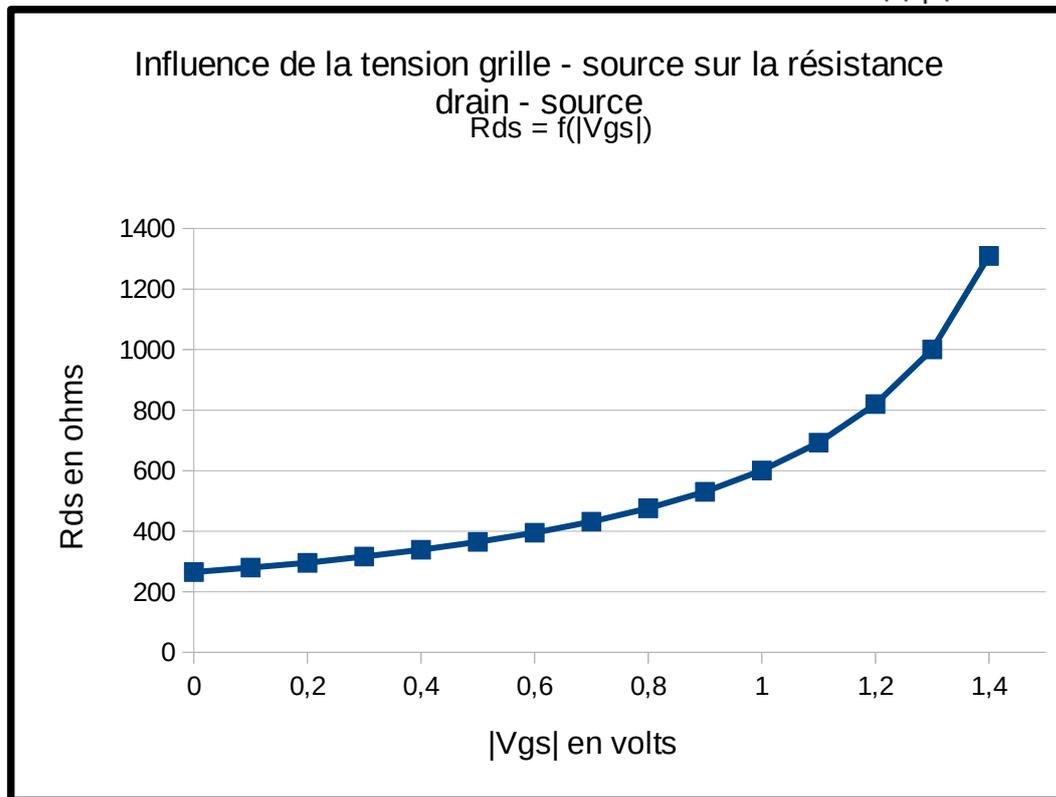
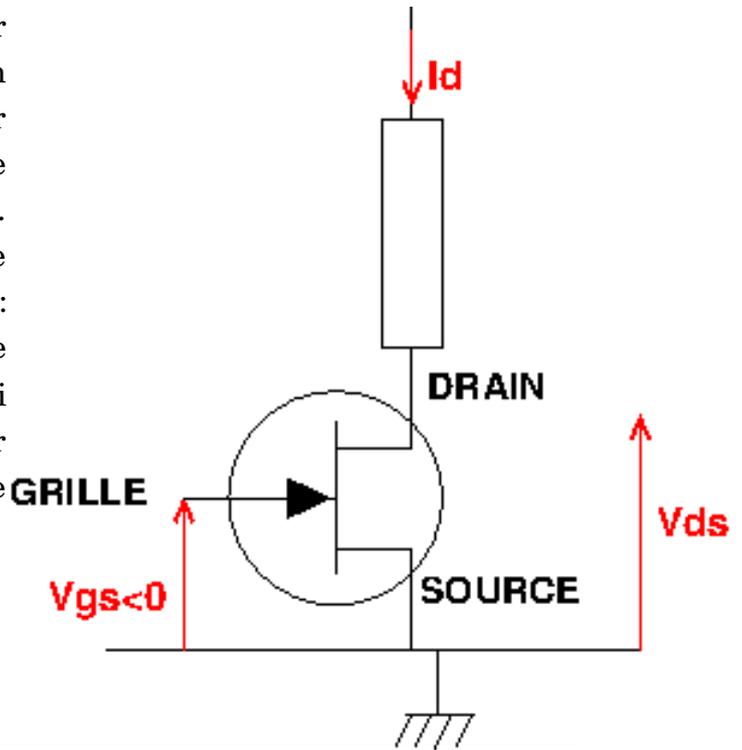
- La valeur moyenne de la résistance d'une telle ampoule est de l'ordre de la cinquantaine d'ohms ;  $R_2$  devra être de l'ordre de la centaine d'ohms. Cela conduit à une valeur de  $(R_1 + R_2)$

d'environ 150Ω. Cette valeur assez faible risque de conduire l'ampli. op. à une saturation en courant de sortie : celui-ci cesse de se comporter de façon quasi parfaite dès qu'il doit fournir un courant de sortie d'intensité supérieure à 20mA.

- La valeur de la résistance de l'ampoule varie en fonction de la température ambiante et celle-ci risque d'augmenter dans le boîtier contenant l'oscillateur compte tenu de la chaleur libérée par effet Joule. On risque d'obtenir une variation au cours du temps de l'amplitude des oscillations.

Une autre solution consiste à simuler une résistance non linéaire à l'aide d'un transistor à effet de champ (TEC). Pour une tension grille – source négative, le courant de grille est d'intensité nulle. Pour des tensions drain – source de faible valeur absolue :  $-0,5V < V_{ds} < 0,5V$ , le transistor se comporte comme une résistance  $R_{ds}$  qui augmente en fonction de la valeur absolue de la tension grille – source selon la loi :

$$R_{ds} = \frac{R_{dso}}{1 - \frac{|V_{gs}|}{V_p}}$$



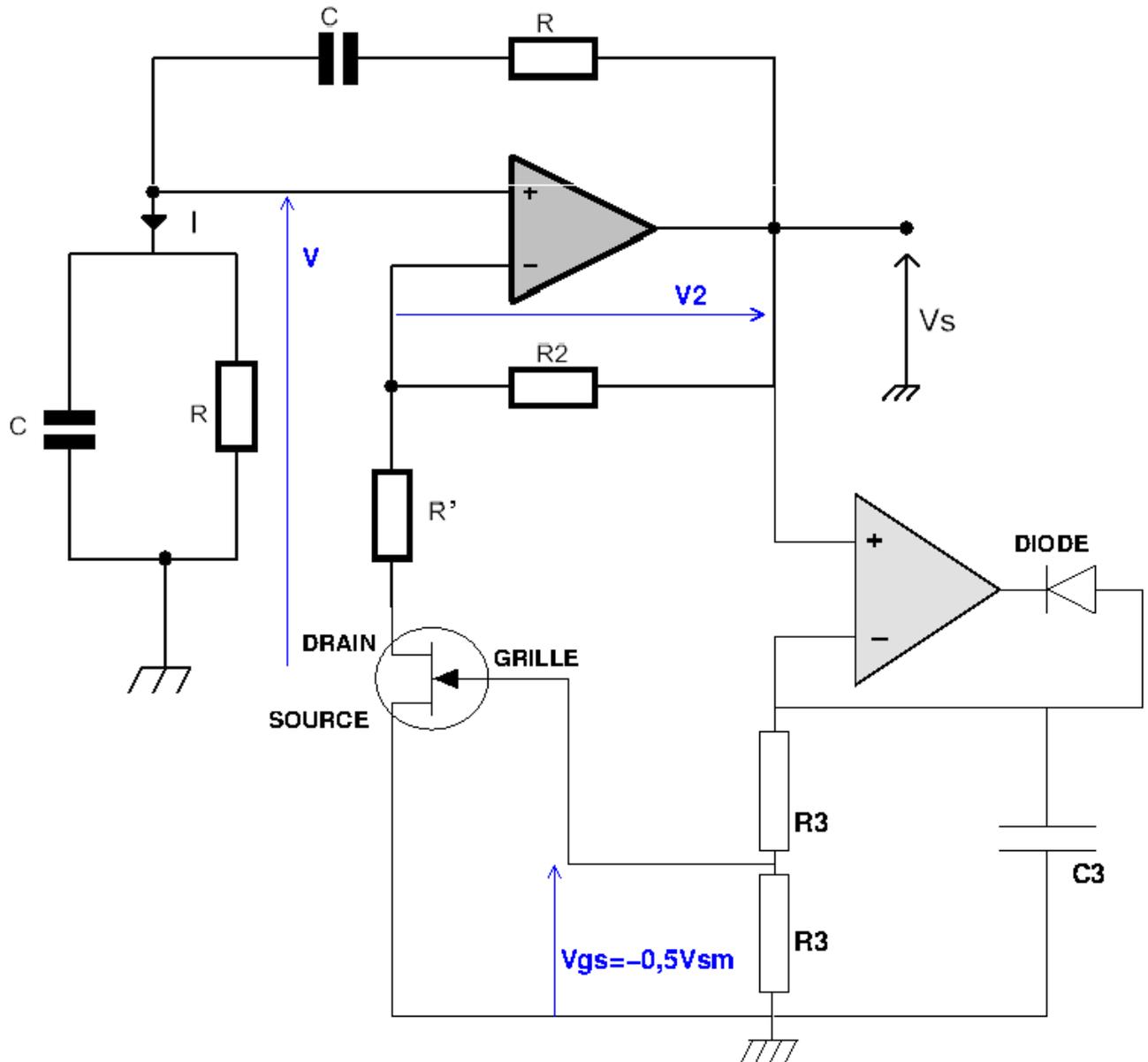
avec, pour le modèle utilisé (BF245A) :

$$V_{dso} = 257\Omega ; V_p = 1,74V.$$

Le TEC est inséré dans le circuit conformément au schéma représenté ci-dessous en série avec une résistance  $R'$ . Un détecteur de crête inverseur permet d'obtenir une tension  $V_{gs}$  proportionnelle à  $-V_{sm}$ . La valeur absolue de  $V_{gs}$  devant rester faible, la résistance du détecteur est en fait la mise en série de deux résistances identiques jouant le rôle de diviseur de tension. En choisissant la constante de temps  $2R_3C_3$  supérieure à la période de la tension  $v_s$ , nous obtenons :  $V_{gs} = -0,5 |V_{sm}|$ .

Finalement, l'ensemble constitué de la résistance  $R'$  et du TEC se comporte comme une résistance  $R_1$  variant en fonction de l'amplitude de  $v_s$  conformément à la loi approchée :

$$R_1 = R' + R_{ds} = R' + \frac{R_{dso}}{1 - \frac{|V_{gs}|}{V_p}} .$$



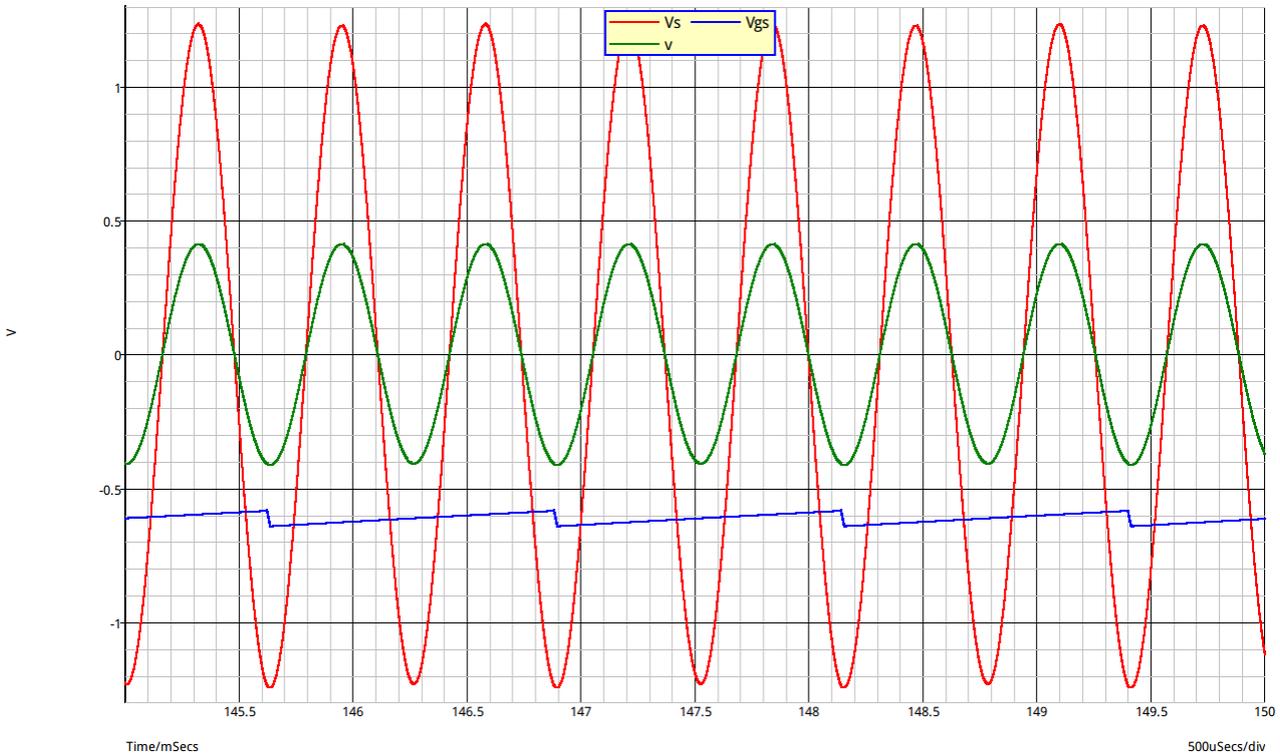
En choisissant :  $R_2 = 4,8k\Omega$  et  $R' = 2,0k\Omega$ , on obtient en début de phase d'amorçage :  $R_1 = 2,257k\Omega$  soit une valeur inférieure à  $\frac{R_2}{2}$ . Les oscillations vont se stabiliser pour  $R_1 = \frac{R_2}{2}$  soit pour  $R_{ds} = 400\Omega$ . On en déduit la valeur de  $V_{gs}$  :

$$400 = \frac{257}{1 + \frac{V_{gs}}{1,74}} \quad \text{soit :} \quad V_{gs} = \frac{(257 - 400) \cdot 1,74}{400} = -0,62V .$$

On en déduit :

$$V_{sm} = 1,24V \quad \text{et :} \quad v_{max} = \frac{V_{sm}}{3} = 0,41V .$$

Voici les résultats de la simulation :



La concordance est assez remarquable puisque la simulation conduit à :

$$f = 1588\text{Hz} ; V_{sm} = 1,23V , v_{max} = 0,411V ; \text{taux de distorsion} : 0,1 \% .$$

Le taux de distorsion est très satisfaisant mais un peu supérieur à ce qu'il était avec une régulation par thermistance CTN ; le détecteur de crête ne fournit pas une tension suffisamment « lissée ». Il faut en effet trouver un compromis concernant sa constante de temps  $2R_3C_3$  : une constante très élevée par rapport à la période du signal fournit un meilleur lissage mais manque de « réactivité » pour rendre compte des variations au cours du temps de l'amplitude de  $v_s$  . J'ai choisi pour la simulation :  $2R_3C_3 \approx 20T$  .

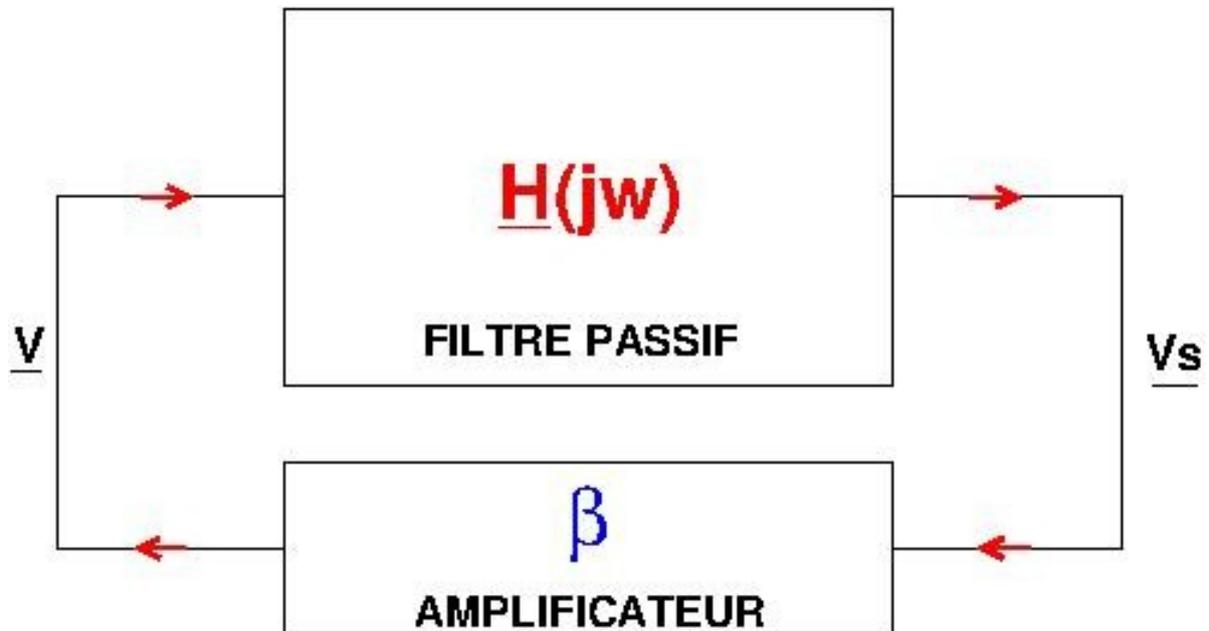
## **PARTIE II : GÉNÉRALISATION À D'AUTRES GÉNÉRATEURS DE TENSION QUASI-SINUSOÏDALE**

### **1. Le critère de Barkhausen.**

Reprenons le montage précédent en raisonnant à l'aide des complexes associés. Nous avons démontrés :

$$H = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{et :} \quad \frac{v_s}{v} = \beta = \frac{R_1 + R_2}{R_1} .$$

Ce montage correspond au schéma-bloc ci-dessous :



La tension  $\underline{v}$  est multiplié par  $\underline{H}$  puis par  $\beta$  pour redonner  $\underline{v}$  si les oscillations sont stables :  $\underline{H}(j\omega) \cdot \beta \cdot \underline{v} = \underline{v}$  .

La condition d'obtention d'un régime sinusoïdal stable est ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) \cdot \beta = 1 .$$

Ce résultat est connu sous le nom de **critère de Barkhausen**.

Vérifions qu'il permet rapidement de retrouver les résultats précédemment acquis. Ici  $\beta$  est un réel positif. Le critère précédent impose donc que  $\underline{H}(j\omega)$  soit un réel positif. Cela conduit de façon immédiate à :

$$\omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{\beta} .$$

De plus :

$$\underline{H} \cdot \beta = 1 \quad \text{ce qui conduit à} \quad \beta = 3 .$$

L'amorçage des oscillations est possible seulement si l'association {filtre passif – amplificateur} amplifie la tension  $v$ . Cela suppose un module de  $\underline{H}(j\omega) \cdot \beta \cdot \underline{v}$  supérieur au module de  $\underline{v}$ . Soit :

$$\|\underline{H}\| \cdot |\beta| > 1 .$$

Dans le cas précédent, cela conduit à :

$$\beta > 3 .$$

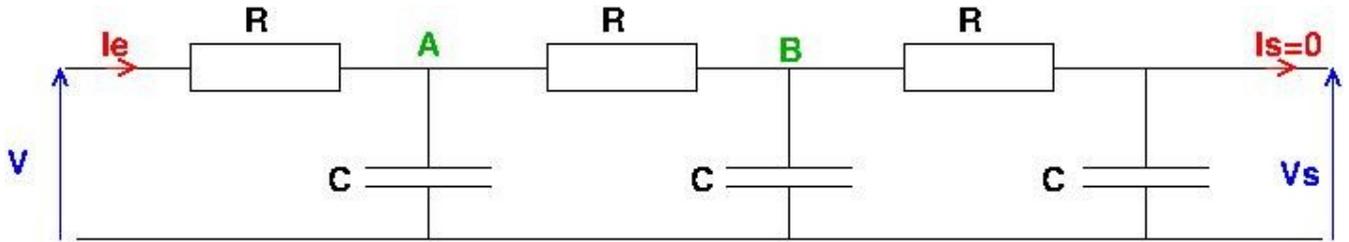
**Remarque :** le critère de Barkhausen impose que, lorsque  $\beta$  est un réel positif, l'argument de  $\underline{H}$  soit nul à la fréquence propre du filtre. Tous les filtres passe-bande du second ordre ont cette propriété. **Il serait donc possible de remplacer dans le montage le filtre de Wien par tout autre filtre passe-bande du second ordre.**

## 2. Cas où l'amplificateur est inverseur.

### 2.1 : Généralités.

Nous supposons maintenant que  $\beta$  est un réel négatif. Le critère de Barkhausen impose qu'à la pulsation d'oscillation,  $H$  soit aussi un réel négatif. Le filtre doit donc posséder une fréquence particulière pour laquelle le déphasage qu'il crée soit égale à  $\pi$  radians. Les filtres passe-bas et passe-haut du troisième ordre ont cette propriété.

### 2.2 : Exemple d'un filtre passe-bas du troisième ordre.



Appliquons le théorème de Millman au nœud A en posant  $\tau = RC$  :

$$v_A = \frac{\frac{v}{R} + \frac{v_B}{R}}{\frac{2}{R} + jC\omega} = \frac{v + v_B}{2 + j \cdot \tau \cdot \omega} .$$

Appliquons le théorème de Millman au nœud B :

$$v_B = \frac{\frac{v_A}{R} + \frac{v_S}{R}}{\frac{2}{R} + jC\omega} = \frac{v_A + v_S}{2 + j \cdot \tau \cdot \omega} .$$

L'intensité du courant de sortie étant nulle à chaque instant, la branche « R,C » de droite sur le schéma se comporte en diviseur de tension ;

$$v_S = \frac{\frac{v_B \cdot 1}{jC \cdot \omega}}{\frac{1}{jC \cdot \omega} + R} = \frac{v_B}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega} .$$

En éliminant  $v_B$  entre les deux dernières égalités, on obtient :

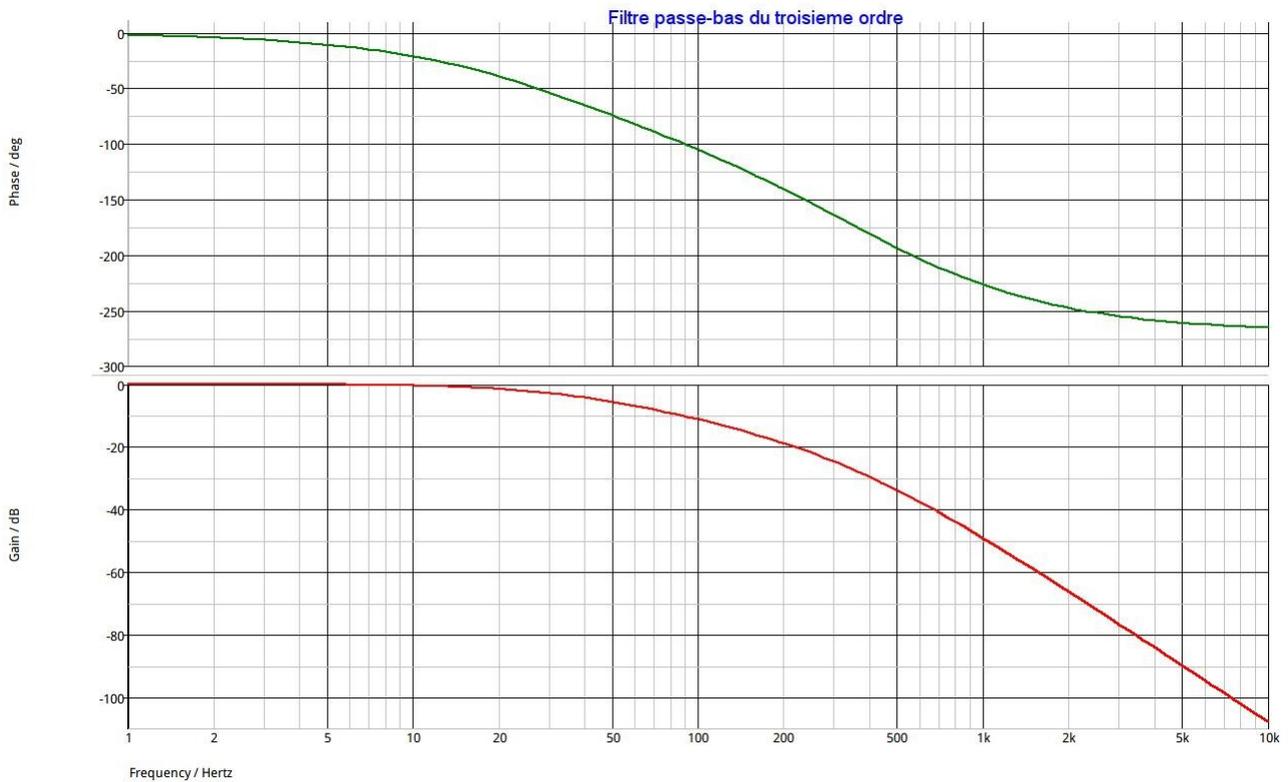
$$v_S \cdot (1 + j \cdot \tau \cdot \omega) = \frac{v_A + v_S}{2 + j \cdot \tau \cdot \omega} \quad \text{soit :} \quad v_A = v_S \cdot (1 + 3j \cdot \tau \cdot \omega - \tau^2 \cdot \omega^2) .$$

En remplaçant  $v_B$  et  $v_A$  par leurs expressions en fonction de  $v_S$  dans la première relation, on obtient :

$$v_S \cdot (1 + 3j \cdot \tau \cdot \omega - \tau^2 \cdot \omega^2) \cdot (2 + j \cdot \tau \cdot \omega) = v + v_S \cdot (1 + j \cdot \tau \cdot \omega) ;$$

soit au final :

$$\underline{H} = \frac{V_S}{V} = \frac{1}{1 + 6j\tau\omega - 5\tau^2\omega^2 - j\tau^3\omega^3} .$$



Le diagramme de Bode de ce filtre est tracé ci-dessous dans le cas  $\tau = RC = 1\text{ms}$ .

Il existe bien une fréquence particulière pour laquelle  $\underline{H}$  est un réel : elle vérifie :

$$6\tau\omega = \tau^3\omega^3 \quad \text{soit :} \quad \tau\omega = \sqrt{6}$$

Ce qui correspond à une fréquence :

$$f_0 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi\tau} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi R \cdot C} .$$

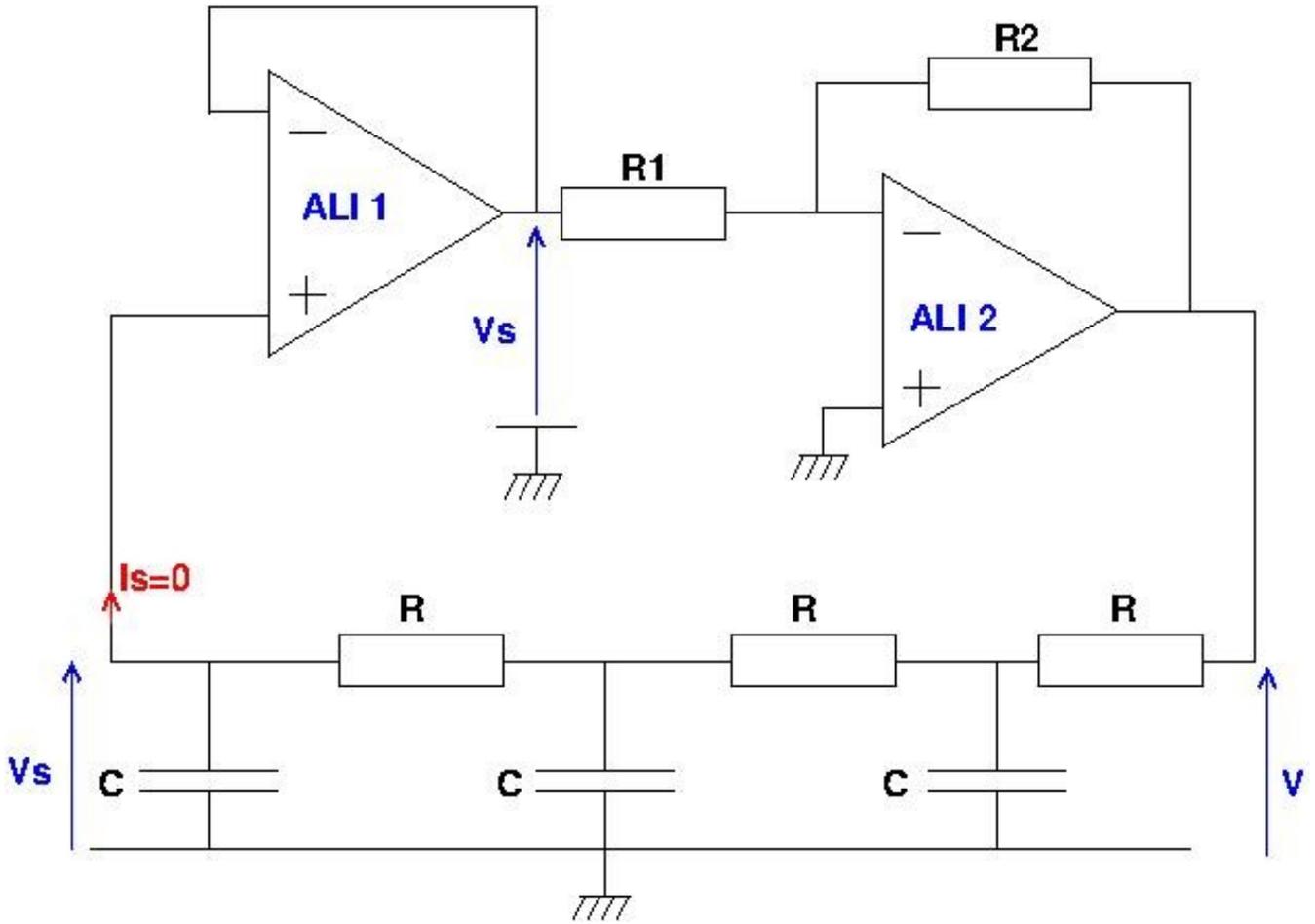
avec  $RC = 1\text{ms}$ , on obtient :  $f_0 \approx 390\text{ Hz}$  .

Dans ce cas particulier, la fonction de transfert est bien, comme attendu, une valeur réelle négative :

$$\underline{H} = -\frac{1}{29} .$$

### 2.3 : Oscillateur quasi-sinusoidal à filtre passe-bas.

Il suffit d'associer le filtre passif passe-bas précédent à un amplificateur inverseur à ampli-op.



L'ampli op de gauche (ALI 1) se comporte en simple suiveur. Son rôle est de maintenir une intensité de courant de sortie du filtre passe-bas nulle à chaque instant, l'expression obtenue précédemment de  $H$  restant ainsi valide. L'ensemble  $\{R_1, R_2, \text{ALI 2}\}$  constitue un amplificateur inverseur tel que :

$$\beta = \frac{v}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Le critère de Barkhausen prévoit des oscillations sinusoïdales d'amplitude stable pour  $\beta = -29$  soit pour  $R_2 = 29R_1$ .

Comme pour l'oscillateur à filtre de Wien, se pose le problème de l'amorçage des oscillations et de la stabilité de leur amplitude.

Comme pour l'oscillateur à filtre de Wien, on peut commencer par écrire l'équation différentielle vérifiée par  $v$ . Partons de la relation vérifiée par  $v_s$  en régime sinusoïdal

établi :  $v = \frac{v_s}{H} = \beta \cdot v_s$ . Cela conduit à l'égalité :

$$(1 + 6j \cdot \tau \cdot \omega - 5\tau^2 \cdot \omega^2 - j \cdot \tau^3 \cdot \omega^3) \cdot v_s = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_s.$$

Sachant qu'en régime sinusoïdal, la multiplication de  $v_s$  par  $(j \cdot \omega)^n$  correspond à prendre la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $v_s$  par rapport au temps, l'équation différentielle vérifiée en régime sinusoïdal s'écrit :

$$\tau^3 \cdot \frac{d^3 v_s}{dt^3} + 5\tau^2 \cdot \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 6\tau \cdot \frac{d v_s}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_s = 0 .$$

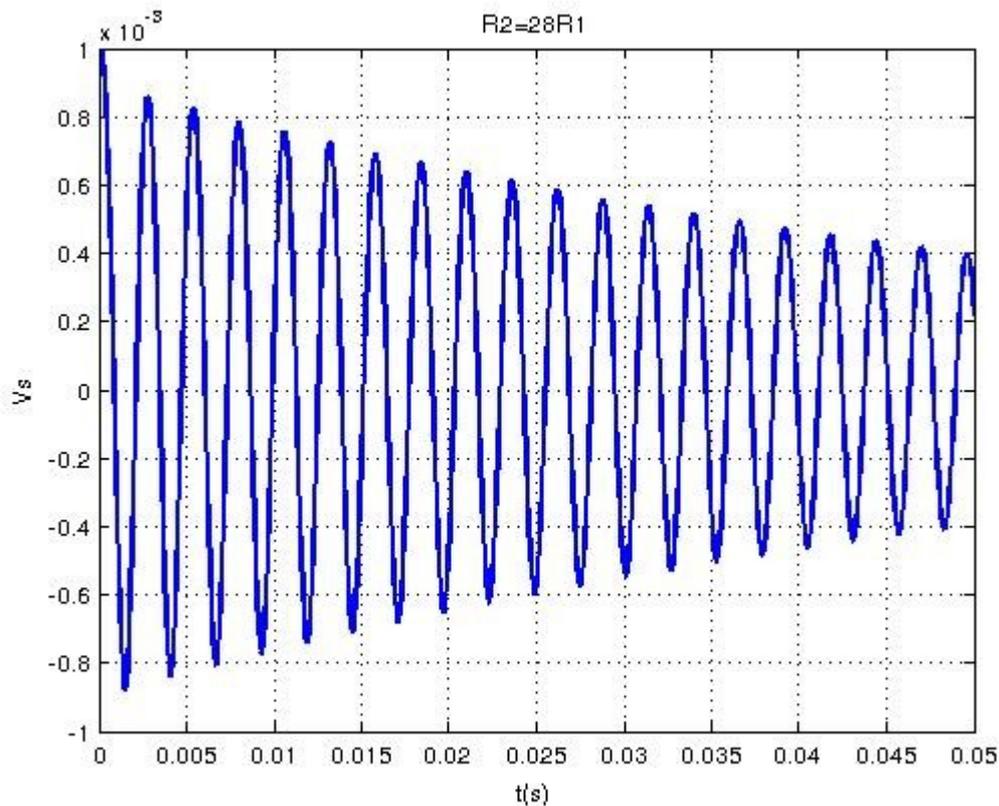
La recherche des solutions de cette équation différentielle demande la résolution de l'équation caractéristique du troisième degré, ce qui n'est pas simple. Nous allons simplement vérifier, par résolution numérique sous MATLAB que, pour une valeur initiale de  $v_s$  très faible (1mV), trois cas sont envisageables selon la valeur du rapport

$$\frac{R_2}{R_1} :$$

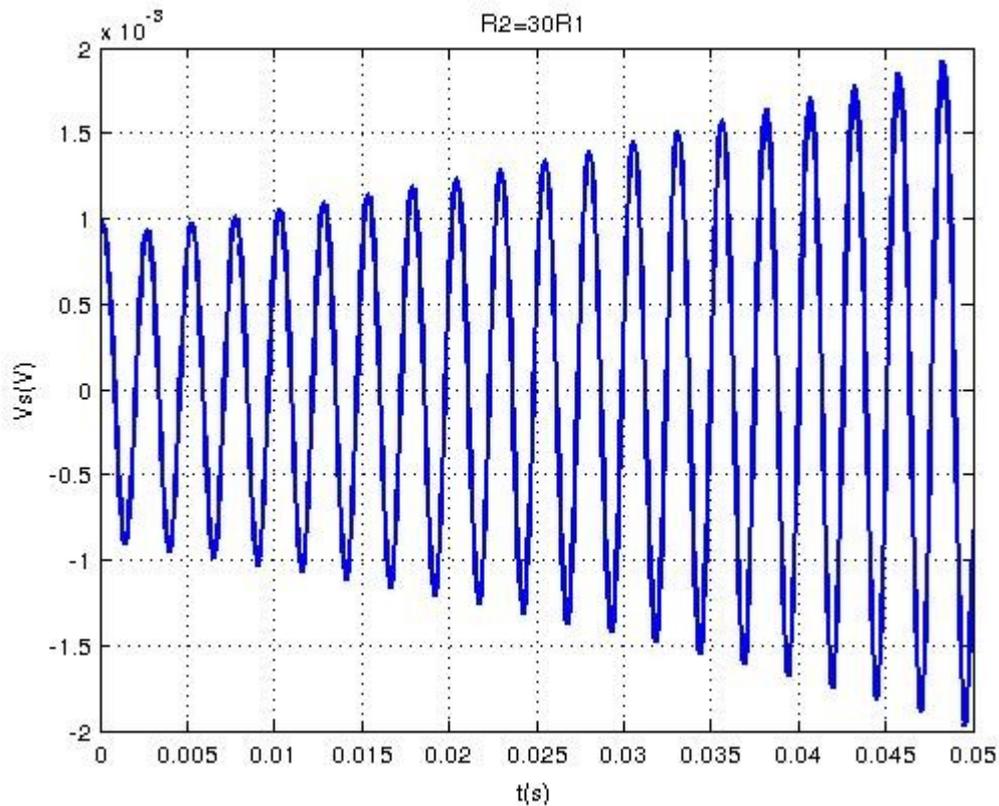
Premier cas :  $R_2 < 29R_1$  : l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement vers zéro ; aucune oscillation stable n'est possible et l'amorçage des oscillations est impossible ;

Second cas :  $R_2 = 29R_1$  : l'amplitude des oscillations est stable mais cette amplitude est trop faible et surtout incontrôlable puisqu'elle dépend des défauts des ampli op ;

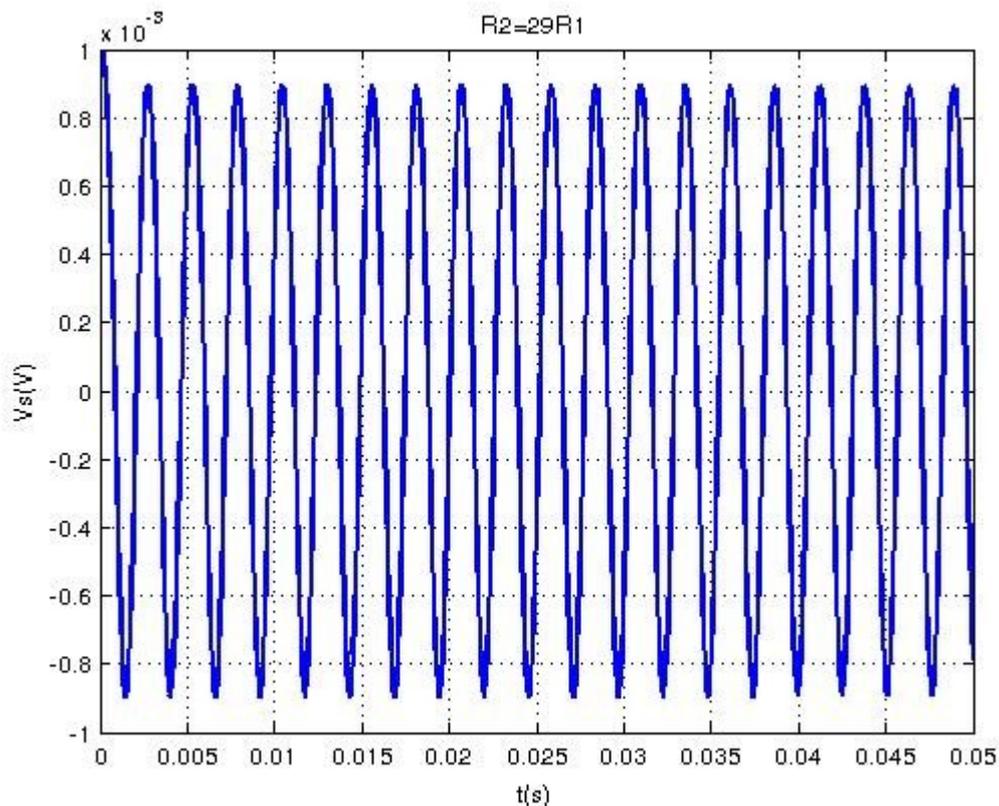
Troisième cas :  $R_2 > 29R_1$  : l'amplitude des oscillations croît exponentiellement, ce qui permet l'amorçage des oscillations.



L'amorçage est donc bien effectivement possible pour  $\|H\|\cdot|\beta|>1$  soit ici :  $R_2 > 29R_1$ . Reste le problème de la stabilisation de l'amplitude. La méthode la plus rudimentaire consiste à choisir  $R_2$  très légèrement supérieur à  $29R_1$  de façon à obtenir  $\|H\|\cdot|\beta|>1$  et à laisser l'amplitude se stabiliser grâce à la saturation de l'ampli op ALI2. Voici le résultat obtenu avec toujours  $RC=1ms$ ,  $R_1 = 10k\Omega$  et  $R_2 = 300k\Omega$ . La courbe rouge correspond à la sortie



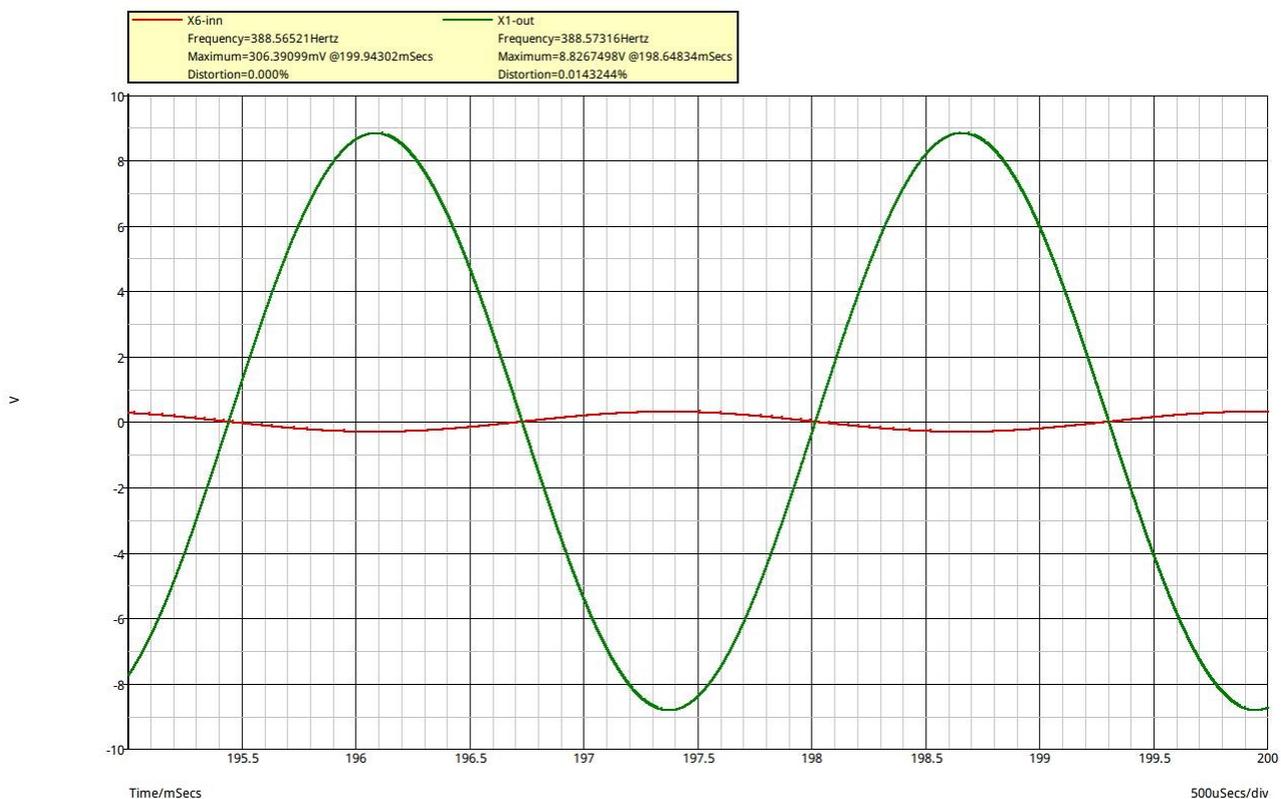
de ALI2 (tension v) et la courbe verte à la sortie de ALI1 (tension  $v_s$ ).



Comme prévu, les deux tensions sont bien en opposition de phase, la fréquence  $f = 388,3\text{Hz}$  est très proche de la fréquence théorique mais on obtient une importante déformation de  $v$  aux voisinages des extremums correspondant à  $+V_{\text{sat}}$  et  $-V_{\text{sat}}$ . Le taux de distorsion est important : environ 4,4 %.

L'étude de l'oscillateur à filtre de Wien a permis la présentation de diverses méthodes permettant d'améliorer la situation : il s'agit toujours d'introduire dans l'amplificateur un dipôle non linéaire de sorte que la valeur absolue de  $\beta$  à l'amorçage soit supérieure à la valeur assurant des oscillations d'amplitude stable, cette valeur absolue diminuant au fur et à mesure que l'amplitude de  $v$  augmente, pour devenir inférieure à partir d'une certaine amplitude de  $v$ . Après un régime transitoire, on obtient des oscillations quasi sinusoïdales d'amplitude stable. Je me limite ici à une seule méthode : celle consistant à remplacer la résistance  $R_2$  par une thermistance CTN dont la résistance diminue en fonction de la valeur efficace de la tension à ses bornes selon la loi :

$$R_2 = 141 \cdot 10^3 + 164,3 \cdot U - 171,0 \cdot U^2$$



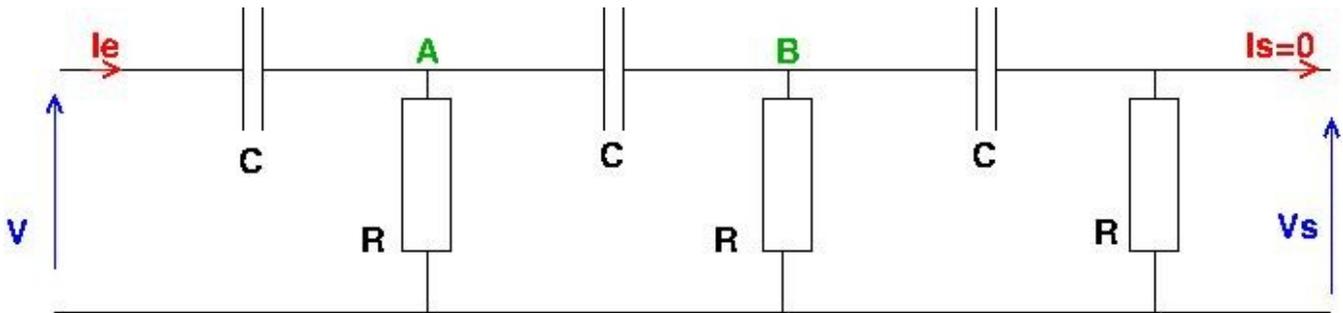
Les deux taux de distorsions sont quasiment nuls : les deux tensions peuvent être considérées pratiquement comme sinusoïdales. La fréquence est très proche de la valeur théorique (0,3 % d'écart).

À l'amorçage,  $R_2 = 30R_1$ . l'amplitude des tensions augmente jusqu'à ce que l'on obtienne  $R_2 = 29R_1 = 136,3\text{k}\Omega$ . Cela correspond à une valeur efficace  $U$  de la tension  $v$  vérifiant :

$$136300 = 141 \cdot 10^3 + 164,3 \cdot U - 171,0 \cdot U^2 ;$$

Ce qui correspond à  $U = 5,75\text{V}$  soit à une tension  $v$  d'amplitude  $V_{\text{max}} = U \cdot \sqrt{2} \approx 8,2\text{V}$ . L'écart relatif avec la valeur simulée est un peu plus grand : 6,8 %.

## 2.4 : Exemple d'un filtre passe-haut du troisième ordre.

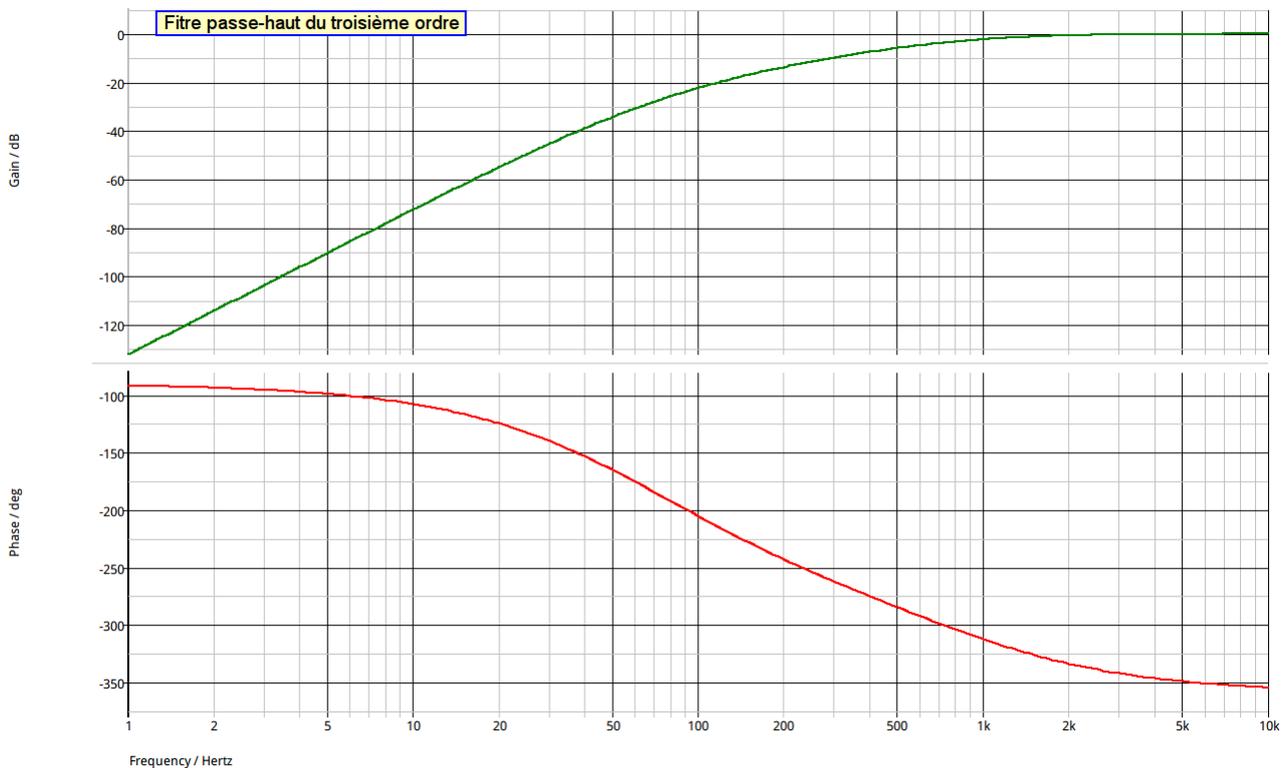


On obtient le passe-haut à partir du passe-bas en permutant R et C dans le montage.

Le calcul de la fonction de transfert se mène de la même façon. Plus simplement encore : la fonction de transfert se déduit de celle du passe-bas en remplaçant  $j \cdot R \cdot C \cdot \omega$  par son inverse ; cela donne :

$$\underline{H} = \frac{V_S}{V} = \frac{1}{1 + \frac{6}{j \cdot \tau \cdot \omega} - \frac{5}{\tau^2 \cdot \omega^2} - \frac{1}{j \cdot \tau^3 \cdot \omega^3}} = \frac{-j \cdot \tau^3 \cdot \omega^3}{1 + 5j \cdot \tau \cdot \omega - 6\tau^2 \cdot \omega^2 - j \tau^3 \cdot \omega^3}.$$

Voici le diagramme de Bode correspondant :



Il existe bien une fréquence particulière pour laquelle la phase vaut  $-180^\circ$ .

Appliquons le critère de Barkhausen :  $\underline{H} \cdot \beta = 1$  avec :  $\beta = -\frac{R_2}{R_1}$ . Le numérateur de  $\underline{H}$  étant imaginaire,  $\underline{H}$  est réel si le dénominateur est aussi imaginaire. Cela suppose :

$$6\tau^2 \cdot \omega^2 = 1 \quad \text{soit : } \tau \cdot \omega = \frac{\sqrt{6}}{6} .$$

Cela correspond à une fréquence d'oscillation :  $f_0 = \frac{\sqrt{6}}{12\pi \cdot R \cdot C} \approx 65,0 \text{ Hz}$  . Dans ces conditions, la valeur de  $\underline{H}$  devient :

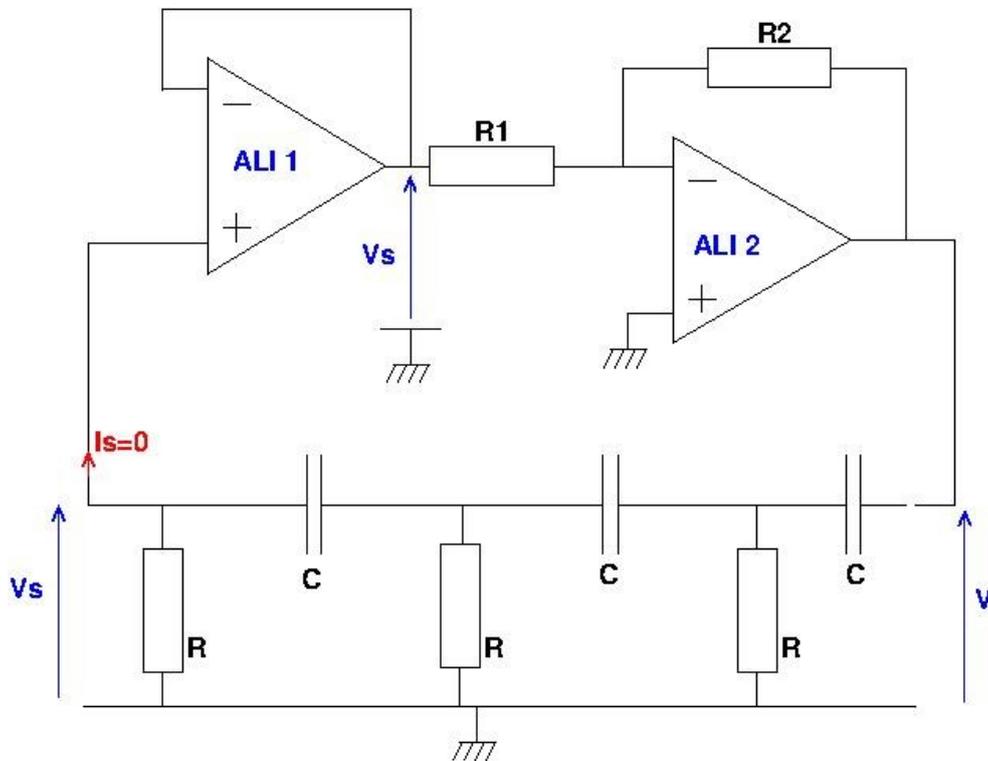
$$\underline{H} = \frac{-j \cdot \tau^3 \cdot \omega^3}{5j \cdot \tau \omega - j \tau^3 \cdot \omega^3} = \frac{-\tau^2 \cdot \omega^2}{5 - \tau^2 \cdot \omega^2} = -\frac{1}{29}$$

Ce qui impose :

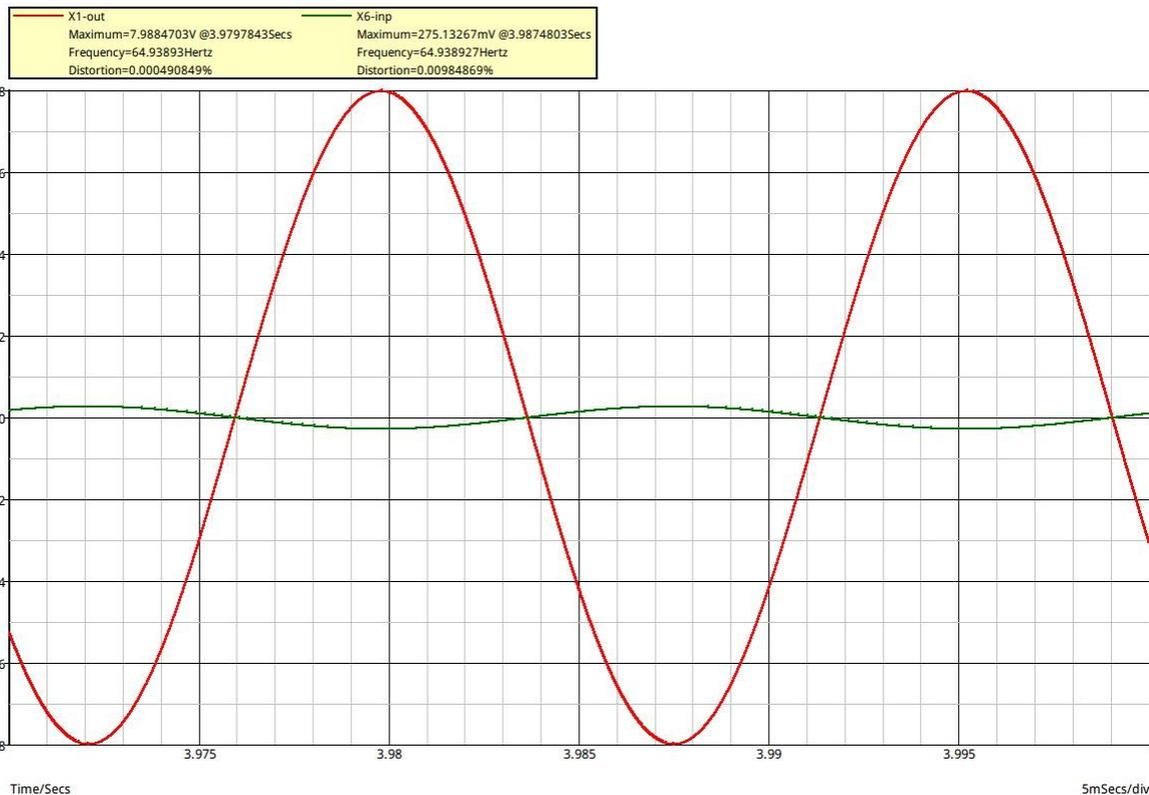
$$\beta = -29 \quad \text{soit : } R_2 = 29R_1 .$$

## 2.5 : Oscillateur quasi-sinusoidal à filtre passe-haut.

Il suffit de permuter R et C dans le montage précédent.



Voici directement la simulation obtenue en choisissant comme précédemment  $R_1 = 4,7\text{k}\Omega$  et en remplaçant la résistance  $R_2$  par la même thermistance CTN.



On constate une fréquence simulée extrêmement proche de la valeur théorique et un taux de distorsion quasiment nul. L'amplitude théorique de  $v$  est comme précédemment égale à 8,2V ; la valeur simulée étant de 8,0V, l'écart relatif est d'environ 2,4 %.

Par rapport au filtre passe-bas, l'usage du passe-haut conserve la valeur de  $\beta$  nécessaire à la stabilité des amplitudes mais divise la fréquence d'oscillation par six.

## Partie III : oscillateur avec simulateur de résistance négative.

### 3.1 : caractéristique tension-courant d'un simulateur.

Il s'agit d'établir la caractéristique d'entrée  $U = f(I)$  du simulateur n° 1 schématisé ci-contre.

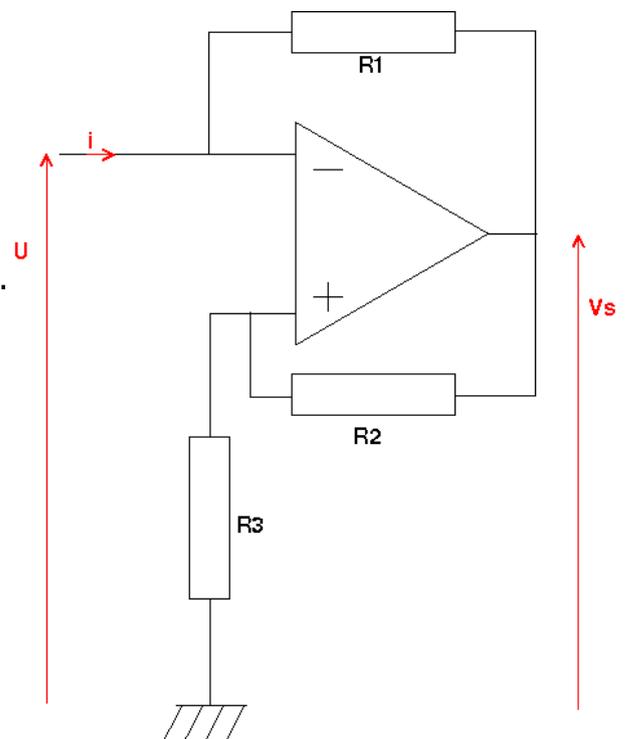
Nous envisageons successivement les trois fonctionnements possibles de l'ampli. op.

a) Fonctionnement linéaire de l'ampli. op.

En absence de courant d'entrée dans l'ampli. op. à son entrée inverseuse, les résistances  $\{R_2, R_3\}$  se comportent en diviseur de tension :

$$V_{E+} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot V_S$$

Loi d'Ohm appliqué à la résistance  $R_1$  :



Simulateur 1

$$V_{E^-} = U = R_1 \cdot i + V_s \quad .$$

En régime linéaire :  $U = V_{E^+} = V_{E^-}$  . En éliminant  $V_s$  entre les deux équations précédentes, on obtient :

$$\frac{R_2 + R_3}{R_3} \cdot U = U - R_1 \cdot i \quad \text{soit :} \quad U \cdot \left( \frac{R_2 + R_3}{R_3} - 1 \right) = -R_1 \cdot i$$

Soit au final :

$$U = \frac{-R_1 \cdot R_3}{R_2} \cdot i$$

Le montage se comporte donc comme une résistance négative puisqu'il est possible d'écrire :

$$U = -R_n \cdot i \quad \text{avec :} \quad R_n = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

Domaine de validité de ce fonctionnement : il faut évidemment :  $|V_s| < V_{sat}$  soit :

$$|U| = |V_{E^-}| < \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot V_{sat} \quad \text{donc aussi :} \quad |i| < \frac{R_3}{R_n \cdot (R_2 + R_3)} \cdot V_{sat} \quad \text{soit} \quad |i| < \frac{R_2}{R_1 \cdot (R_2 + R_3)} \cdot V_{sat}$$

Le montage se comporte en simulateur de résistance négative tant que :

$$|U| < V_0 \quad \text{et :} \quad |i| < I_0 \quad \text{avec :} \quad V_0 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot V_{sat} \quad \text{et :} \quad I_0 = \frac{R_2}{R_1 \cdot (R_2 + R_3)} \cdot V_{sat}$$

**Remarque importante :** La puissance reçue, au sens algébrique du terme, est :  $P = U \cdot i = -R_n \cdot i^2$  . Le simulateur est orienté en convention récepteur ; cela signifie donc que le simulateur se comporte, vis à vis du dipôle branché à son entrée, comme un générateur fournissant à ce dipôle une puissance proportionnelle au carré de l'intensité du courant traversant ce dipôle.

b) Fonctionnement de l'ampli. op. en régime de saturation haute.

Maintenant :  $V_s = V_{sat}$  ; la loi d'Ohm appliquée à la résistance  $R_1$  conduit à :

$$U = V_{E^-} = R_1 \cdot i + V_{sat}$$

Il s'agit d'une droite passant par le point de coordonnées  $(-I_0, V_0)$ . La totalité de cette droite appartient-elle à la caractéristique ? Pour répondre à la question, il suffit de remarquer qu'en régime de saturation haute, nous avons nécessairement :  $V_{E^+} > V_{E^-}$  . Cela impose :

$$V_{E^+} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot V_{sat} > U \quad \text{soit :} \quad U < V_0$$

Seule une demie-droite doit être conservée conformément au tracé ci-dessous.

c) Fonctionnement de l'ampli. op. en régime de saturation basse.

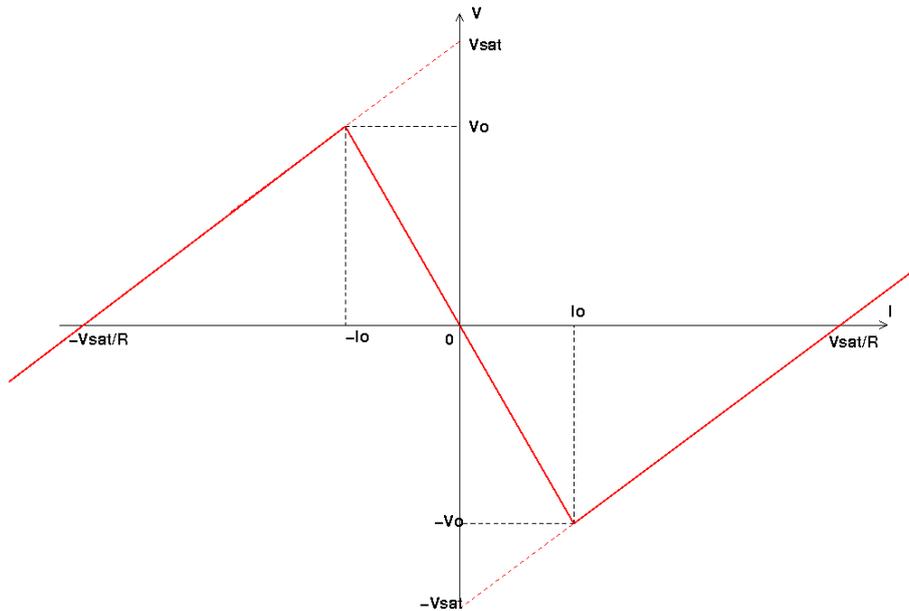
Le raisonnement est analogue au précédent. La loi d'Ohm appliquée à la résistance  $R_1$  conduit à :

$$U = V_{E-} = R_1 \cdot i - V_{sat}$$

Il s'agit d'une droite passant par le point de coordonnées  $(I_0, -V_0)$ . En régime de saturation basse, nous avons :  $V_{E+} < V_{E-}$ . Cela impose :

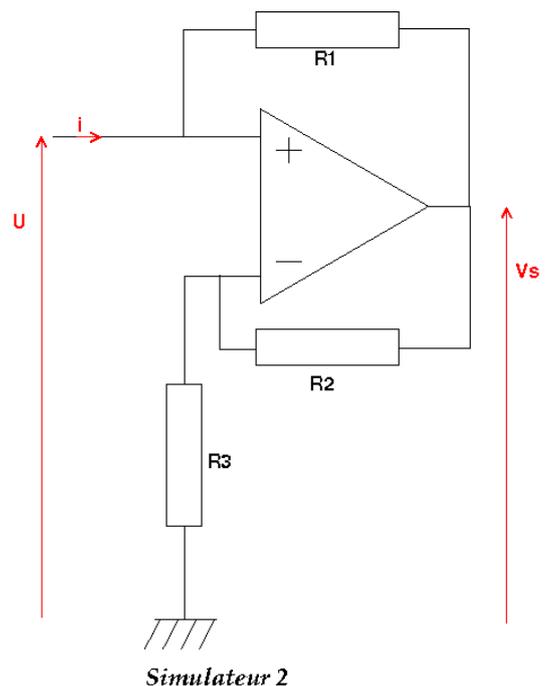
$$V_{E+} = \frac{-R_3}{R_2 + R_3} \cdot V_{sat} < U \quad \text{soit : } U < V_0$$

Seule une demie-droite doit être conservée conformément au tracé ci-dessous.



### 3.2 : influence de la permutation des deux entrées sur la caractéristique du simulateur.

Supposons que l'on permute les deux entrées obtenant ainsi le simulateur n° 2 schématisé ci-contre. On peut reprendre pas à pas les différentes étapes du raisonnement précédent. **On vérifie alors que l'on obtient exactement la même caractéristique.** Est-ce à dire que les deux simulateurs sont interchangeables ? Nous allons montrer que non, le choix du simulateur étant imposé par la résistance équivalente en régime continu du dipôle oscillant. Pour cela, nous allons étudier la stabilité de chaque simulateur lorsque l'entrée est fermée par une résistance  $R_e$ . On suppose que les défauts de l'ampli. op. et/ou les effets d'antenne génèrent entre les dates  $t = \tau$  et  $t = 0$  une tension constante  $V_s = U_0$  très faible en sortie de l'ampli. op. et on étudie l'évolution de  $V_s$  au cours du temps pour  $t > 0$ .



### a) Cas du simulateur n° 1.

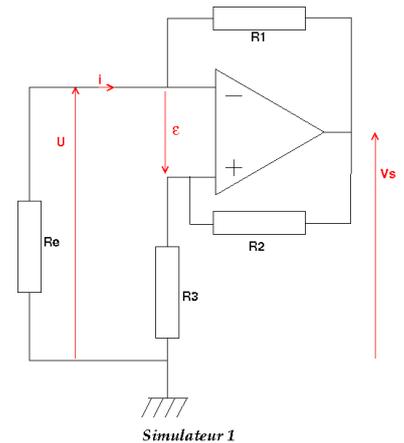
Chaque couple de résistances se comporte en diviseur de la tension  $V_s$ . On obtient :

$$V_{E^+} = \beta^+ \cdot V_s \quad \text{avec : } \beta^+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3} ;$$

$$V_{E^-} = \beta^- \cdot V_s \quad \text{avec : } \beta^- = \frac{R_e}{R_e + R_1} ;$$

En régime sinusoïdal établi, l'expérience montre que l'ampli. op. se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{V_s}{\varepsilon} = \frac{A_0}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec : } A_0 \approx 2,2 \cdot 10^5 \quad \text{et : } \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \quad \text{avec : } f_0 \approx 12 \text{ Hz}$$



Sachant que multiplier le complexe associé à une grandeur fonction sinusoïdale du temps par  $j \cdot \omega$  est équivalent à dériver cette grandeur par rapport au temps, la valeur instantanée de  $V_s$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{dV_s}{dt} + V_s = A_0 \cdot \varepsilon$$

Ici :  $\varepsilon = V_{E^+} - V_{E^-} = (\beta^+ - \beta^-) \cdot V_s$  ; l'équation différentielle vérifiée par  $V_s$  est donc :

$$\frac{1}{A_0 \cdot \omega_0} \cdot \frac{dV_s}{dt} + \left( \beta^- - \beta^+ + \frac{1}{A_0} \right) \cdot V_s = 0$$

En posant :  $\lambda = \beta^- - \beta^+ + \frac{1}{A_0}$ , les solutions de cette équation sont de la forme :

$$V_s = U_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot A_0 \cdot \omega_0 \cdot t)$$

Deux situations sont alors envisageables :

Situation n° 1 :  $\lambda < 0$  : mathématiquement  $V_s$  tend vers  $\pm \infty$  selon le signe de  $U_0$ , l'évolution étant a priori très rapide puisque la valeur de  $A_0$  est très grande. En pratique, le régime linéaire est donc impossible.

Situation n° 2 :  $\lambda \geq 0$  :  $V_s$  tend rapidement vers zéro ou garde sa valeur initiale a priori très faible. Le régime linéaire est donc possible. Le fonctionnement en régime linéaire est possible. Nous verrons par la suite que cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

Le fonctionnement en régime linéaire est donc possible si :  $\beta^- \geq \beta^+ - \frac{1}{A_0}$ . En pratique :

$$\frac{1}{A_0} \approx 4,5 \cdot 10^{-6} ; \text{ cette valeur est très inférieure à l'incertitude sur la valeur de } \beta^+$$

compte tenu des incertitudes sur les valeurs des résistances. On peut donc retenir :

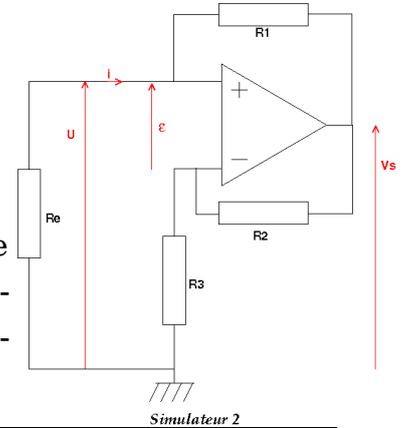
$$\text{Régime linéaire possible si : } \beta^- > \beta^+ \text{ soit : } \frac{R_e}{R_e + R_1} > \frac{R_3}{R_2 + R_3} \text{ soit : } R_e > \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \text{ soit : } R_e > R_n$$

### b) Cas du simulateur n° 2 :

Il suffit de permuter les expressions de  $\beta^+$  et de  $\beta^-$  par rapport au cas précédent. Ce qui conduit à :

$$\beta^- = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \text{ et } \beta^+ = \frac{R_e}{R_e + R_1} .$$

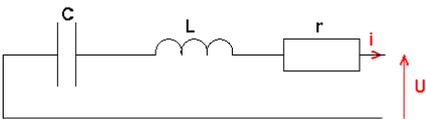
L'étude du comportement de l'ampli. op. se mène de la même manière. On obtient une conclusion identique : le régime linéaire est possible pour  $\beta^- > \beta^+$  mais cela se traduit à une inégalité différente sur les résistances. Il faut retenir :



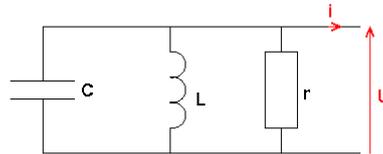
$$\text{Régime linéaire possible si : } \beta^- > \beta^+ \text{ soit : } \frac{R_e}{R_e + R_1} < \frac{R_3}{R_2 + R_3} \text{ soit : } R_e < \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \text{ soit : } R_e < R_n$$

### 3.3 : Choix du type de simulateur en fonction du circuit oscillant.

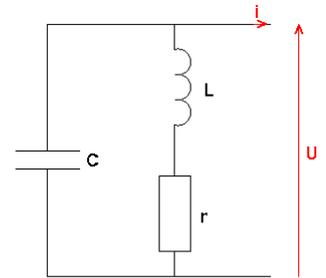
Le circuit oscillant est presque toujours un dipôle RLC série ou parallèle dont les oscillations vont être entretenues grâce au simulateur de résistance négative. On peut rencontrer classiquement les trois cas schématisés ci-dessous :



Circuit oscillant 1



Circuit oscillant 2



Circuit oscillant 3

On sait que l'impédance d'un condensateur en régime continu est infinie alors que celle d'une bobine est nulle. L'impédance du circuit 1 est donc, en régime continu, infinie alors que celle des circuits 2 et 3 vaut  $r$ . Ainsi, en absence de charge initiale du condensateur et de courant initial dans la bobine, à la date  $t = 0$  où le circuit oscillant est relié au simulateur, le circuit oscillant se comporte comme une résistance  $R_e$  infinie dans le cas 1 et égale à  $r$  dans les cas 2 et 3. Or le fonctionnement en résistance négative du simulateur suppose le régime linéaire de l'ampli. op. : **le circuit oscillant n° 1 doit nécessairement être associé au simulateur n° 1**. Sur ce seul critère, les simulateurs 1 et 2 pourrait convenir aux circuits oscillants 2 et 3. Il faut aussi que les oscillations puissent s'amorcer : cela suppose que le simulateur fournisse au circuit oscillant une puissance supérieure à celle que consomme le circuit oscillant par effet Joule. Cela suppose :  $R_n > r$ . Ainsi, **le simulateur n° 2 doit nécessairement être associé aux circuits oscillants 2 et 3**.

### 3.4 : Étude de l'oscillateur n° 1.

a) Équation différentielle vérifiée lorsque l'ampli. op. fonctionne en régime linéaire.

L'ampli. op. se comporte comme une résistance négative. En remarquant que le dipôle oscillant est orienté en convention générateur, la loi d'addition des tensions conduit à :

$$U = -R_n \cdot i = -L \cdot \frac{di}{dt} - r \cdot i - \frac{q}{C}$$

avec :  $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{U}{R_n}$ . En dérivant par rapport au temps les termes de l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{L}{R_n} \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{r}{R_n} \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R_n \cdot C}$$

Soit en multipliant tous les termes par  $R_n \cdot C$  :

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} + (r - R_n) \cdot C \cdot \frac{dU}{dt} + U = 0 \quad \text{ou encore :} \quad \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{r - R_n}{L} \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U = 0$$

En posant :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  et :  $\xi = \frac{(r - R_n)}{2 \cdot L \cdot \omega_0}$ , cette équation

peut s'écrire sous la forme classique déjà utilisée à propos de l'oscillateur à filtre de Wien :

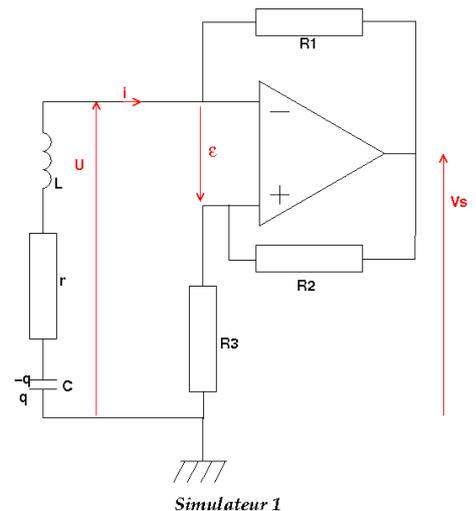
$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 \cdot U = 0$$

L'obtention d'un régime sinusoïdal correspond à  $\xi = 0$ , la fréquence des oscillations étant alors la fréquence propre du circuit oscillant :

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

La condition  $\xi = 0$  correspond à  $R_n = r$ . Le sens physique de ce résultat est simple sachant que le simulateur fournit une puissance au dipôle oscillant égale à  $R_n \cdot i^2$ . En régime sinusoïdal, la bobine et le condensateur n'absorbent pas d'énergie en moyenne sur une période (puissance moyenne nulle). Ainsi, le simulateur de résistance négative fournit au dipôle oscillant exactement la puissance qu'il dissipe par effet Joule.

Comme déjà expliqué à propos des autres oscillateurs, la condition  $R_n = r$  ne permet pas l'amorçage des oscillations. Cet amorçage n'est possible que pour  $\xi < 0$ . Il faut en fait choisir  $R_n$  un peu supérieur à  $r$ , ce qui permet une augmentation exponentielle au cours du temps de l'amplitude des oscillations jusqu'à la saturation de l'ampli. op. ; dans ces conditions,  $U$  vérifie une nouvelle équation différentielle. En effet, il faut maintenant écrire :



$$U = R_1 \cdot i \pm V_{sat} = -L \cdot \frac{di}{dt} - r \cdot i - \frac{q}{C}$$

Le «  $\pm i$  » dépend de l'état haut ou bas de saturation de l'ampli. op. En dérivant par rapport au temps et en simplifiant, on obtient :

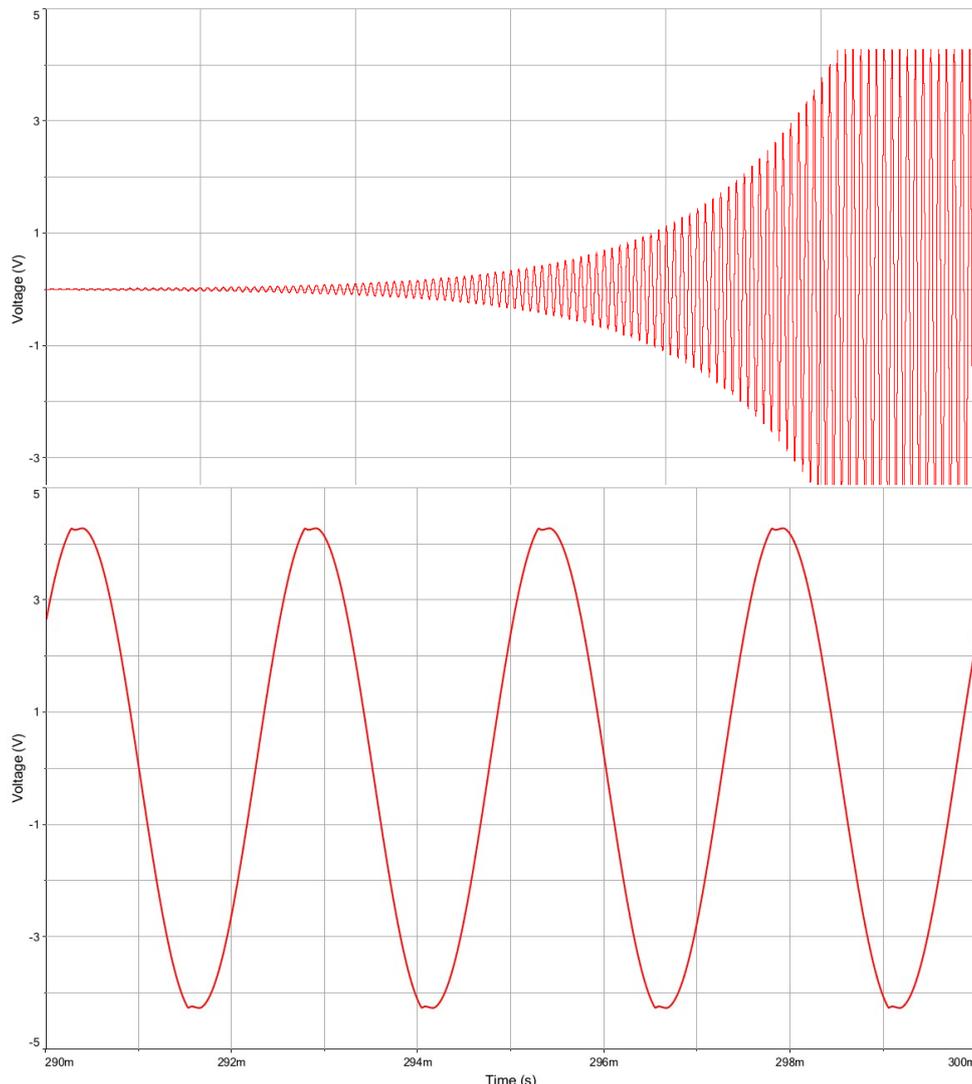
$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} + (r + R_1) \cdot C \cdot \frac{dU}{dt} + U = 0 \quad \text{ou encore :} \quad \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{r + R_1}{L} \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U = 0$$

soit encore une équation de la forme :  $\frac{d^2 U}{dt^2} + 2 \cdot \xi' \cdot \omega_0 \cdot \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 \cdot U = 0$  avec maintenant  $\xi' > 0$ .

On comprend bien ainsi le processus de stabilisation de l'amplitude : tant que l'ampli. op. fonctionne en régime linéaire, l'amplitude augmente, dès que l'ampli. op. sature, l'amplitude décroît. L'amplitude va donc se stabiliser à une valeur un peu supérieure à  $V_0$ . Si on choisit une valeur de  $R_n$  de très peu supérieure à  $r$ , les oscillations après la période d'amorçage, sont quasi sinusoïdales, de fréquence très proche de  $f_0$  un peu supérieure à  $V_0$ . Voici les résultats d'une simulation avec :

$$r = 470 \, \Omega ; L = 20 \text{mH} ; C = 7,92 \mu\text{F} ; R_1 = R_2 = 1 \text{k}\Omega ; R_3 = 471 \Omega.$$

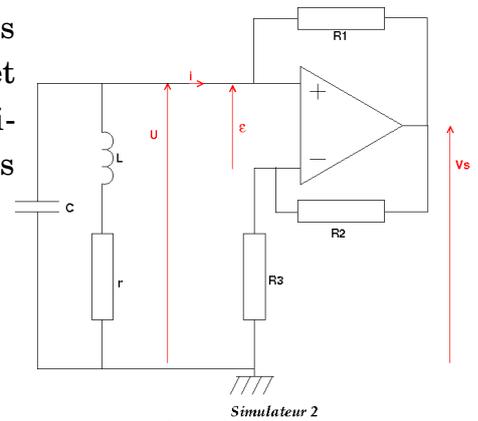
Ces valeurs correspondent à :  $f_0 = 400 \text{Hz}$  et  $V_0 = 4,32 \text{V}$  pour  $V_{sat} = 13,5 \text{V}$ . Le premier enregistrement de  $U = f(t)$  montre l'amorçage des oscillations ; le second correspond à un enregistrement en régime périodique établi.



On obtient en régime établi une tension de fréquence 398Hz, d'amplitude 4,33V. Ces deux valeurs sont très proches des valeurs théoriques. On remarque cependant que le signal n'est pas rigoureusement sinusoïdal : au fondamental, se superpose une tension harmonique de fréquence triple et d'amplitude 32mV, ce qui correspond à un taux de distorsion d'environ 0,7 %. D'autre part, pour obtenir un taux de distorsion faible, il est nécessaire de choisir  $R_n$  de très peu supérieure à  $r$  ; ce réglage est relativement délicat et rend la durée d'amorçage assez longue.

### 3.5. Étude du simulateur n° 3.

En notant  $i_C$  et  $i_L$  les intensités instantanées respectives des courants circulant dans la branche du condensateur et dans la branche de la bobine, en remarquant que les dipôles sont orientés en convention générateur, la loi des nœuds conduit à :



$$i = i_C + i_L \quad \text{avec : } i_C = -C \frac{dU}{dt} \quad \text{et : } i = -\frac{U}{R_n} \quad \text{donc : } i_L = C \frac{dU}{dt} - \frac{U}{R_n}$$

La tension aux bornes de la bobine peut s'écrire :

$$U = -L \frac{di_L}{dt} - r \cdot i_L = -LC \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{L}{R_n} \cdot \frac{dU}{dt} - r \cdot C \frac{dU}{dt} + \frac{r}{R_n} \cdot U$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par  $U$  :

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} + \left( r \cdot C - \frac{L}{R_n} \right) \cdot \frac{dU}{dt} + \left( 1 - \frac{r}{R_n} \right) \cdot U = 0 \quad \text{ou : } \frac{d^2 U}{dt^2} + \left( \frac{r}{L} - \frac{1}{R_n \cdot C} \right) \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot \left( 1 - \frac{r}{R_n} \right) \cdot U = 0$$

Un régime purement sinusoïdal correspondrait à l'équation différentielle simple :

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot U = 0 \quad .$$

Il faudrait donc alors choisir :

$$\left( 1 - \frac{r}{R_n} \right) > 0 \quad \text{soit : } R_n > r \quad \text{et : } \left( r \cdot C - \frac{L}{R_n} \right) = 0 \quad \text{soit : } R_n = \frac{L}{r \cdot C}$$

L'égalité et l'inégalité ne sont compatibles que si :

$$\frac{L}{r \cdot C} > r \quad \text{soit : } r < \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Cette condition sur la résistance de la bobine est indispensable à l'obtention d'oscillations. Elle n'est cependant pas très contraignante en pratique. Les bobines usuelles ont une inductance de l'ordre de la dizaine de millihenry pour une résistance interne de l'ordre de la dizaine d'ohms. Il suffit donc de choisir un condensateur de capacité nettement inférieure à 100µF, ce qui ne pose pas de problème pratique... Dans ces conditions, la fréquence d'oscillation est :

$$f_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{r}{R_n}\right)} = f_0 \cdot \left(1 - \frac{r}{R_n}\right)$$

**Remarque :** comme dans le montage précédent, dans le cas limite d'une tension  $U$  sinusoïdale, la puissance fournie par le simulateur de résistance négative compense exactement la puissance consommée par effet Joule par la résistance  $r$  :  $r \cdot i_L^2 = R_n \cdot i^2$  en valeurs moyenne sur une période mais, puisque l'amplitude de  $i$  est très supérieure à l'amplitude de  $i_L$  (revoir l'étude des circuits bouchons en régime sinusoïdal pour s'en convaincre), on obtient logiquement une valeur de  $R_n$  largement supérieure à  $r$ .

Comme pour les oscillateurs précédents, l'obtention d'une tension rigoureusement sinusoïdale est impossible ; en effet, l'amorçage des oscillations nécessite un coefficient du terme en  $\left(\frac{dU}{dt}\right)$  légèrement négatif. En pratique il faut donc choisir une valeur de  $R_n$  un peu inférieure à  $\left(\frac{L}{r \cdot C}\right)$  de façon à obtenir des oscillations dont l'amplitude croît exponentiellement au cours du temps. Dès que l'ampli op sature, la tension  $U$  vérifie une nouvelle équation différentielle ; pour l'obtenir, il faut reprendre la méthode précédente en posant :  $U = R_1 \cdot i \pm V_{sat}$ . On obtient :

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} + \left(r \cdot C + \frac{L}{R_1}\right) \cdot \frac{dU}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R_1}\right) \cdot U = \pm \frac{V_{sat}}{R_1}$$

Le coefficient du terme en  $\left(\frac{dU}{dt}\right)$  est alors strictement positif. Ainsi, dès que l'amplitude de  $U$  dépasse la valeur  $V_0$ , l'amplitude décroît exponentiellement ; dès que cette amplitude repasse en dessous de la valeur  $V_0$ , l'amplitude de  $U$  recommence à croître exponentiellement. On voit bien ainsi qu'après une période d'amorçage, l'amplitude de  $U$  va se stabiliser à une valeur proche de  $V_0$ .

Pour illustrer cela, voici une simulation faite avec les valeurs suivantes :

$L=20\text{mH}$  ;  $C=7,92\mu\text{F}$  ;  $r=4,7\Omega$  ;  $R_2 = R_3 = 10\text{k}\Omega$ .

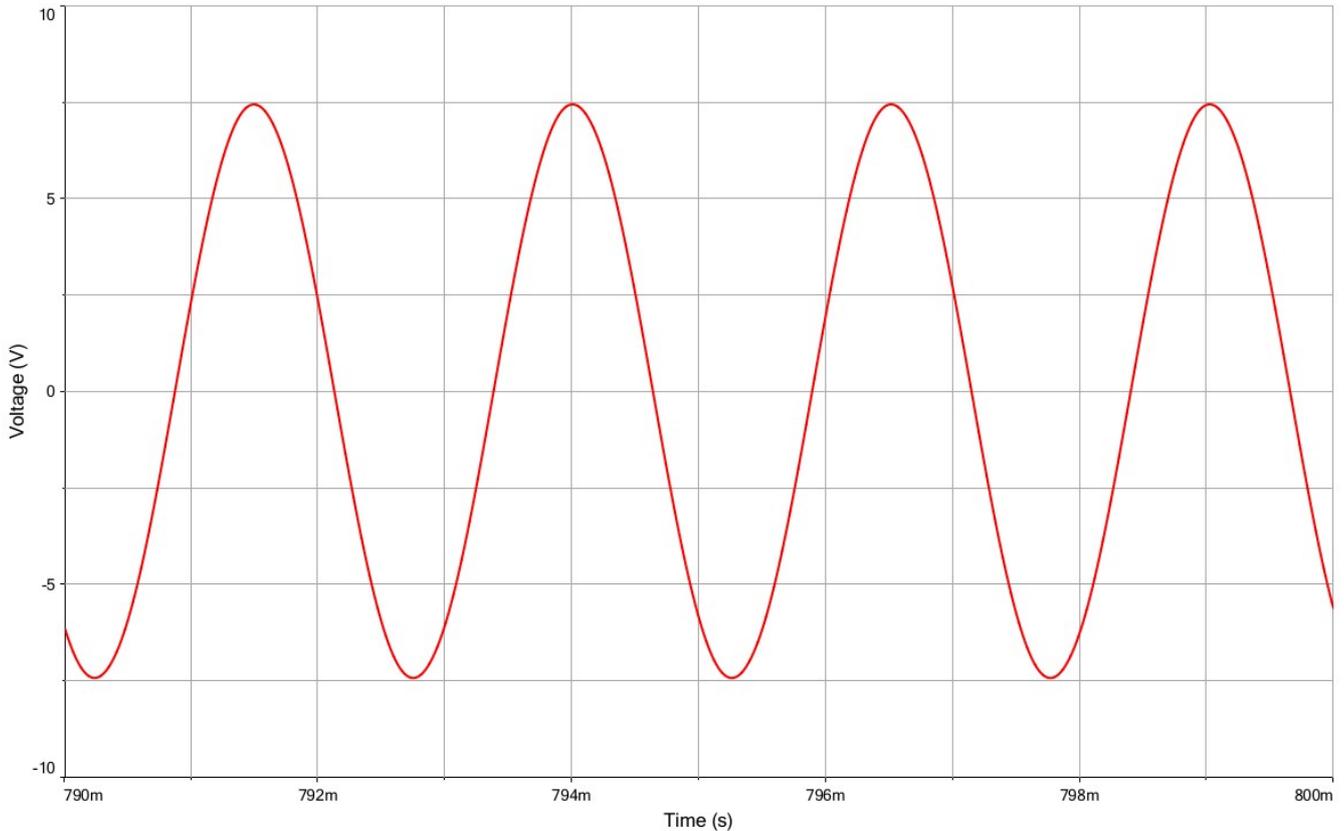
Ainsi :  $\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 50,2\Omega$  ; cette valeur est largement supérieure à  $r$ . La fréquence propre  $f_0$  est inchangée par rapport au montage précédent :  $f_0 \approx 400\text{Hz}$  ; la valeur de  $R_n$  à choisir doit être un peu inférieure à  $\frac{L}{r \cdot C} \approx 537\Omega$ . Nous choisissons  $R_1 = 500\Omega$  soit  $R_n = 500\Omega$ .

Ainsi la fréquence théorique des oscillations est :

$$f_1 = f_0 \cdot \left(1 - \frac{r}{R_n}\right) \approx 396 \text{ Hz}$$

L'amplitude des oscillations est voisine de :

$$V_0 = V_{sat} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} \approx 6,75 \text{ V} \quad \text{avec : } V_{sat} = 13,5 \text{ V}$$

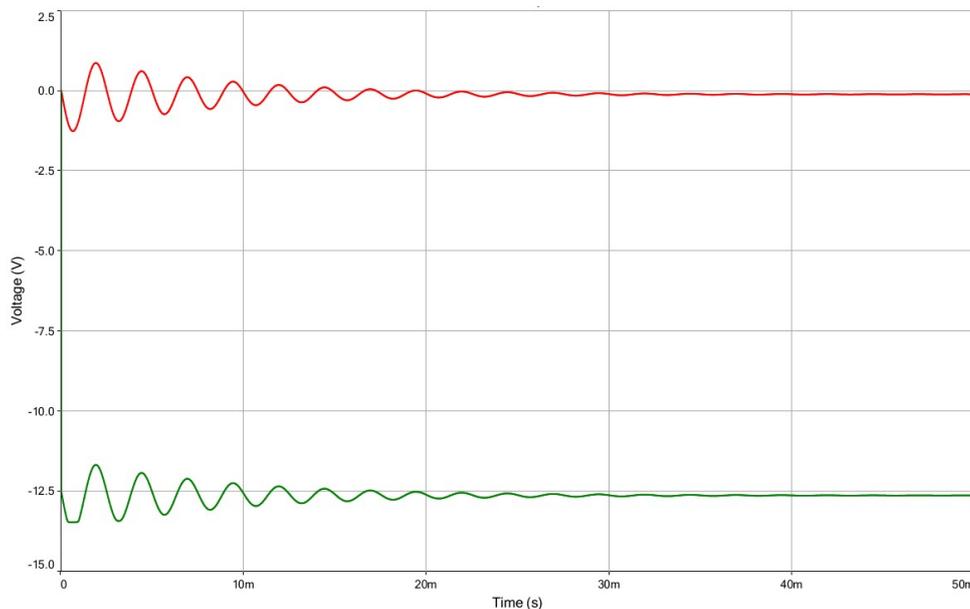


On obtient une tension de fréquence 398Hz d'amplitude 743,5mV. Cette fréquence est très proche de la valeur théorique  $f_1$  (écart relatif de 0,5%) et, comme prévu, l'amplitude est un peu supérieure à  $V_0$ . La tension n'est pas rigoureusement sinusoïdale : au fondamental, se superpose un harmonique de fréquence triple et d'amplitude 16,3mV, ce qui correspond à un taux de distorsion d'environ 0,2 %. Cet oscillateur fournit une tension plus proche d'une tension sinusoïdale que le précédent et est plus facile à régler : quelques ohms de plus ou de moins pour  $R_n$  ne modifie pas radicalement le fonctionnement du montage contrairement au cas précédent.

### 3.6. Quelques précisions sur le fonctionnement des simulateurs.

a) Retour sur l'influence d'une permutation des entrées de l'ampli. op.

Nous avons montré que le simulateur n° 1 convient lorsque le condensateur est en série avec la bobine alors que le simulateur n° 2 convient lorsque le condensateur est en parallèle avec la bobine. Si cette règle n'est pas respectée, l'ampli. op. par en état de saturation lorsque le circuit oscillant est relié au simulateur, rendant ainsi impossible le fonctionnement en simulateur de résistance négative. Nous pouvons maintenant prouver que ce blocage est permanent. Il suffit de remarquer que, dans les deux types de montages, lorsque l'ampli op est en état de saturation,  $U$  vérifie une équation différentielle qui tend à faire tendre exponentiellement son amplitude vers zéro. Imaginons que, lors de la connexion du dipôle oscillant au simulateur, les défauts de l'ampli. op. ou/et un effet d'antenne génère une tension  $U$  très faible.  $U$  sera alors ramenée rapidement à la valeur nulle. Les oscillations ne pourront pas s'amorcer. Voici, pour illustrer ce propos, une simulation faite en supposant une valeur initiale de  $U$  égale à 1mV dans le montage précédent après permutation des entrées inverseuse et non inverseuse. ( $U$  correspond à la courbe rouge et  $V_s$  à la courbe verte)



b)

Comment choisir les valeurs des trois résistances du simulateur ?

Nous avons expliqué l'importance du choix de la valeur  $R_n$  mais pour une valeur de  $R_n$  donnée, une infinité de triplets ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ) conviennent. Rappelons que l'ampli. op., pour fonctionner de façon quasi idéale ne doit pas fournir en sortie de courant d'intensité maximale supérieure à la vingtaine de milliampères pour les modèles courants. Sans faire de calculs sophistiqués, on peut s'assurer que  $\frac{V_{sat}}{R_2+R_3}$  d'une part,  $\frac{V_{sat}}{|R_1+Z|}$  d'autre part, ne dépasse pas la dizaine de milliampères ( $Z$  impédance complexe en régime sinu-

soïdal du dipôle oscillant).

Pour que le réglage de la valeur de  $R_n$  soit aisé, deux cas simples sont envisageables :

\* celui choisi dans le dernier montage : on choisit pour  $R_2$  et  $R_3$  deux valeurs égales relativement élevées de façon que le courant fourni par l'ampli op dans la branche  $R_2 - R_3$  soit très faible. On a ainsi  $R_n = R_1$ . Cette méthode a l'avantage de fournir une valeur de l'amplitude importante :  $\frac{V_{sat}}{2}$  environ, mais suppose que l'impédance de la branche constituée de  $R_1$  et du dipôle oscillant ait une impédance au moins égale à  $1k\Omega$ . Cette condition est largement obtenue dans le dernier montage puisque la mise en parallèle du condensateur et de la bobine constitue ici un circuit bouchon. En revanche, cette méthode ne peut être utilisée avec le premier montage : l'impédance de la branche constituée de  $R_1$  et du dipôle oscillant a une impédance de l'ordre de  $2r$  : valeur en général assez faible qui conduirait à une saturation en courant de l'ampli. op.

\* celui choisi dans le premier montage : on donne à  $R_1$  et à  $R_2$  deux valeurs égales et relativement élevées (au moins  $1k\Omega$ ), ce qui conduit à  $R_n = R_3$ . Ainsi : même des valeurs faibles de  $r$  et  $R_n$  ne font jamais saturer l'ampli. op. en courant. Ce montage a néanmoins un (petit) inconvénient : l'amplitude de  $U$ , de l'ordre de  $V_o$  est alors une valeur relativement faible mais il est possible ensuite de l'amplifier si nécessaire.

[retour à la page principale](#)