Faut-il courir sous la pluie ?

Position du problème.

Une personne se déplace à la vitesse v_{ht} constante par rapport à la terre pour effectuer un parcours de longueur donnée D. On suppose le vent et la pluie de caractéristiques fixes lors du trajet. Peut-on ajuster la valeur de v_{ht} pour capter un volume minimum de pluie ?

Préambule : expression du débit volumique de pluie reçue par une surface plane d'aire S.

On considère une surface plane caractérisée par son vecteur surface $\overrightarrow{S}$. On note $\overrightarrow{V}$ la vitesse des gouttes de pluie **dans un repère liée à cette surface**. La démonstration est très proche de celle faite pour déterminer l'expression de l'intensité d'un courant à travers une surface. On choisit comme surface le disque de centre O, d'aire S, caractérisé par le vecteur normal $\overrightarrow{S}$.

Les gouttes de pluies traversant le disque entre les instants de dates zéro et t sont celles qui, à la date zéro, sont contenues dans le cylindre dont la base est le disque étudié et la génératrice $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{V} \cdot t$; on note E le volume d'eau par unité de volume du mélange {air, pluie} ; Le volume du cylindre est : $h \cdot S = S \cdot V \cdot \cos(\theta) \cdot t = \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{V} \cdot t$; Le volume d'eau traversant le disque par unité de temps, c'est à dire le débit volumique d'eau à travers le disque est ainsi :

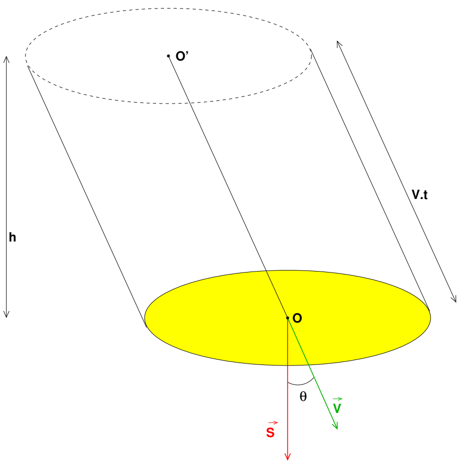


FIGURE 1 –

$$\boxed{\Phi = E \cdot \overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{V}}$$

Il s'agit du flux à travers la surface du vecteur $E \cdot \overrightarrow{V}$...

Premier cas : la personne se déplace face au vent.

La personne est assimilé à un parallélépipède rectangle de hauteur H, de largeur L et de longueur e. Il se déplace par rapport à la terre à la vitesse fixe de vecteur $\overrightarrow{V_{ht}} = V_{ht} \cdot \overrightarrow{U_x}$. La pertinence de ce modèle parallélépipédique sera discutée en fin de document. La vitesse de la pluie par rapport à la terre est :

$$\overrightarrow{V_{pt}} = \left(-V_x \cdot \overrightarrow{U_x} - V_y \cdot \overrightarrow{U_y}\right) \; avec \; v_x > 0 \; ; \; v_y > 0$$

La vitesse de la pluie par rapport à la personne en déplacement est :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_{pt}} - \overrightarrow{V_{ht}} = [-V_{ht} - V_x]\,\overrightarrow{U_x} - V_y \cdot \overrightarrow{U_y}$$

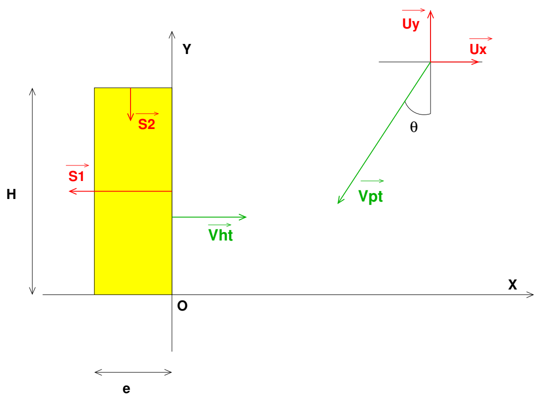


FIGURE 2 –

Le débit volumique d'eau reçue est :

$$\Phi = E \cdot \overrightarrow{V} \cdot \left(\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}\right) \; avec \; \overrightarrow{S_1} = -H \cdot L \cdot \overrightarrow{U_x} \; et \; \overrightarrow{S_2} = -L \cdot e \cdot \overrightarrow{U_y}$$

$$\Phi = E \cdot L \cdot [H \cdot (V_{ht} + V_x) + e \cdot V_y]$$

La durée du parcours de longueur D est égale à $\frac{D}{V_{ht}}$. Le volume d'eau reçue pendant le parcours a donc comme expression :

$$\boxed{Vol = \Phi \cdot \frac{D}{V_{ht}} = D \cdot E \cdot L \cdot \left[H \cdot \left(1 + \frac{V_x}{V_{ht}}\right) + e \cdot \frac{V_y}{V_{ht}}\right]}$$

Ce volume est une fonction monotone décroissante de V_{ht}. On voit ainsi que la personne à tout intérêt à se déplacer le plus vite possible pour recevoir le moins d'eau possible. Ce résultat est aussi valide dans le cas particulier $V_x = 0$ qui correspond à l'absence de vent.

Second cas : la personne se déplace dos au vent.

On peut conserver les caractéristiques précédentes pour la pluie et inverser le sens du vecteur vitesse par rapport à la terre de la personne : $\overrightarrow{V_{ht}} = -V_{ht} \cdot \overrightarrow{U_x}$ avec $V_{ht} > 0$. Ainsi :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_{pt}} - \overrightarrow{V_{ht}} = [V_{ht} - V_x]\,\overrightarrow{U_x} - V_y \cdot \overrightarrow{U_y}$$

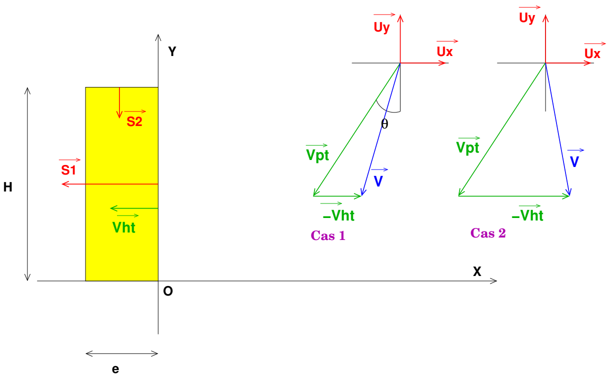


FIGURE 3 –

Attention cependant : la situation ne manque pas de subtilité. Il faut distinguer deux cas suivant le signe de la composante horizontale de $\overrightarrow{V}$.

Premier cas : $V_{ht} - V_x < 0$: cette situation correspond à une composante horizontale de la vitesse de la pluie relativement importante (vent fort) et/ou à une personne se déplaçant assez lentement. **La pluie frappe donc le dessus et la face arrière du parallélépipède**. (voir schéma)

On obtient ainsi :

$$\Phi = E \cdot \overrightarrow{V} \cdot \left(\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2}\right)$$

$$\Phi = E \cdot L \cdot [H \cdot (-V_{ht} + V_x) + e \cdot V_y]$$

Le sens du déplacement s'étant aussi inversé, le volume d'eau reçue devient :

$$\boxed{Vol = \Phi \cdot \frac{D}{V_{ht}} = D \cdot E \cdot L \cdot \left[H \cdot \left(-1 + \frac{V_x}{V_{ht}}\right) + e \cdot \frac{V_y}{V_{ht}}\right]}$$

Second cas : $V_{ht} - V_x > 0$. Cette situation correspond à une composante horizontale de la vitesse de la pluie relativement petite (vent faible) et/ou à une personne se déplaçant assez rapidement. Dans ce cas, **la pluie frappe la face avant du parallélépipède**. Le flux à travers cette surface s'obtient en inversant le sens du vecteur $\overrightarrow{S_1}$:

$$\Phi = E \cdot \overrightarrow{V} \cdot \left(H \cdot L \cdot \overrightarrow{U_x} - L \cdot e \cdot \overrightarrow{U_y}\right)$$

$$\Phi = E \cdot L \cdot [H \cdot (V_{ht} - V_x) + e \cdot V_y]$$

$$\boxed{Vol = \Phi \cdot \frac{D}{V_{ht}} = D \cdot E \cdot L \cdot \left[H \cdot \left(1 - \frac{V_x}{V_{ht}}\right) + e \cdot \frac{V_y}{V_{ht}}\right]}$$

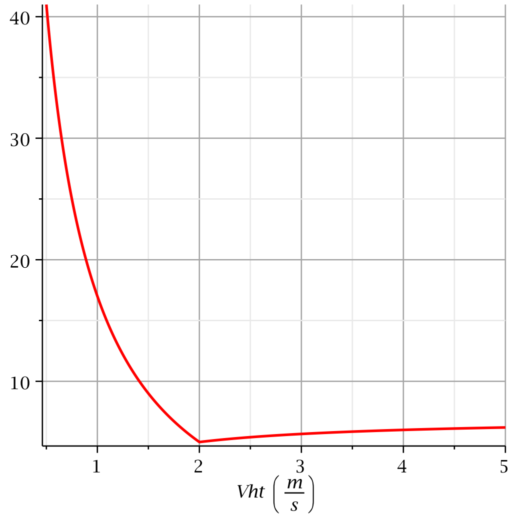
Conclusion, quand la personne se déplace dos au vent, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} \Phi = E \cdot L \cdot [H \cdot |V_x - V_{ht}| + e \cdot V_y] \\ Vol = \Phi \cdot \frac{D}{V_{ht}} = D \cdot E \cdot L \cdot \left[H \cdot |\frac{V_x}{V_{ht}} - 1| + e \cdot \frac{V_y}{V_{ht}}\right] \end{cases}}$$

Nous sommes maintenant amenés à distinguer deux cas :

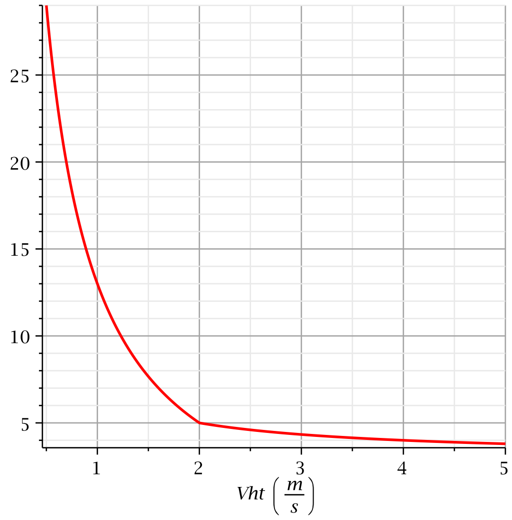
Situation n° 1 : $\frac{H}{e} > \frac{V_y}{V_x}$.

La courbe représentant les variations de Vol en fonction de V_{ht} a l'allure ci-dessous ; la courbe présente un minimum pour $V_{ht} = V_x$. J'ai choisi pour le tracé : $V_x = 2m/s$; $V_y = 10m/s$; $\frac{H}{e} = 7$. Les ordonnées sont arbitraires...



Situation n° 2 : $\frac{H}{e} \leq \frac{V_y}{V_x}$.

La courbe à l'allure suivante ; elle ne présente plus de minimum. J'ai choisi pour le tracé : $V_x = 2m/s$; $V_y = 10m/s$; $\frac{H}{e} = 3$. Les ordonnées n'ont pas, là encore, de sens physique particulier...



Cas d'un déplacement de direction quelconque par rapport à la direction du vent

On conserve les notations précédentes mais on considère maintenant que la personne possède une vitesse par rapport à la terre égale à la précédente à laquelle s'ajoute une composante $V_z \cdot \overrightarrow{U_z}$ où $\overrightarrow{U_z}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan des figures précédentes et orienté vers le lecteur. V_z peut être positif ou négatif selon la situation. La vitesse de la pluie par rapport à la personne est maintenant : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_{pt}} - \overrightarrow{V_{ht}} - V_z \cdot \overrightarrow{U_z}$. Aux flux déjà calculer, il convient donc de rajouter celui du vecteur $-V_z \cdot \overrightarrow{U_z}$. Ce flux est nul à travers toutes les faces du parallélépipède sauf à travers une surface latérale d'aire $S_L = H \cdot e$. Le flux à ajouter est : $\Phi_L = E \cdot H \cdot e \cdot |V_z|$. Au volume déjà calculé de pluie reçu, il convient d'ajouter la quantité :

$$Vol_L = \Phi_L \cdot \frac{D}{V_t} = E \cdot H \cdot e \cdot |V_z| \cdot \frac{D}{\sqrt{V_{ht}^2 + V_z^2}}$$

En effet : la vitesse $\mathrm{V_t}$ de la personne par rapport à la terre est la norme du vecteur $\overrightarrow{V_{ht}} + V_z \cdot \overrightarrow{U_z}$.

La suite de la discussion est à mener au cas par cas sur le modèle des discussions précédentes...

Pertinence du modèle parallélépipédique de la personne en déplacement ?

Il faut se souvenir que le flux d'un vecteur constant est conservatif. Cela signifie que ce flux ne dépend pas directement de la géométrie de la surface à travers laquelle on le calcule mais seulement du contour fermé délimitant la surface.Cela se démontre en remarquant que la divergence d'un vecteur constant est nulle puis en appliquant le théorème d'Ostrogradski. Pour illustrer cela, je m'intéresse au flux du vecteur $E \cdot \overrightarrow{V}$ à travers une surface délimitée par un cercle appartenant à un plan orthogonal à $\overrightarrow{V}$. J'ai représenté trois surfaces délimitées par le cercle (en noir sur le schéma) : un disque (en jaune), un cône (en bleu) et une hémisphère (en rouge). Le flux du vecteur $E \cdot \overrightarrow{V}$ est le même à travers chacune de ces trois surfaces ; les aires des trois surfaces sont différentes et pourtant : le débit volumique d'eau reçue est le même pour ces trois surfaces ! Les surfaces recevant la pluie n'ont pas besoin d'être planes pour que les calculs précédents soient valides. Soient S_v l'aire de la surface correspondant au projeté orthogonal de la personne dans le plan vertical (O,y,z) ,S_h l'aire de la surface correspondant au projeté orthogonal de la personne dans le plan horizontal (O,x,z) et S_Ll'aire de la surface correspondant au projeté orthogonal de la personne dans le plan (O,x,y). Les calculs de volumes d'eau reçue s'obtiennent en remplaçant (H.L) par S_v, (e.L) par S_h et (H.e) par S_L dans les expressions obtenues précédemment.

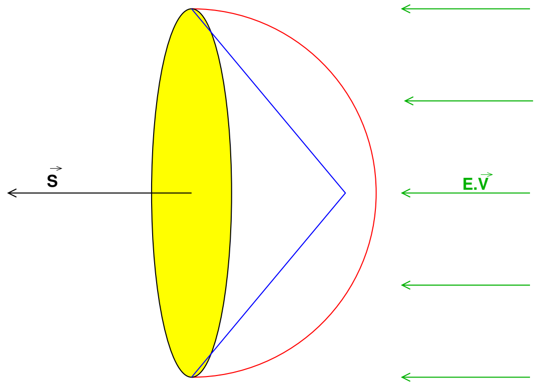


FIGURE 4 –

Conclusion.

Dans la grande majorité des situations, la personne a donc intérêt à courir le plus vite possible pour minimiser la quantité de pluie reçue sur un trajet donné. Cependant, si le vent n'est pas trop fort et souffle de l'arrière, pour certaines caractéristiques de la pluie et de la morphologie de la personne, on peut imaginer une vitesse de déplacement qui minimise cette quantité. Cette vitesse particulière est égale à la composante horizontale de la vitesse du vent mesurée par rapport à la terre.

Remarque : toujours si le vent souffle de l'arrière et quels que soient les rapports $\frac{V_y}{V_x}$ et $\frac{H}{e}$, on peut remarquer que, dans le cas particulier $V_{ht} = V_x$, la vitesse relative de la pluie par rapport au parallélépipède a une composante horizontale nulle : dans ces conditions, seule la face horizontale reçoit de la pluie : le débit volumique de pluie est celui qu'il recevrait en étant immobile par rapport à la terre en absence de vent...

retour à la page principale