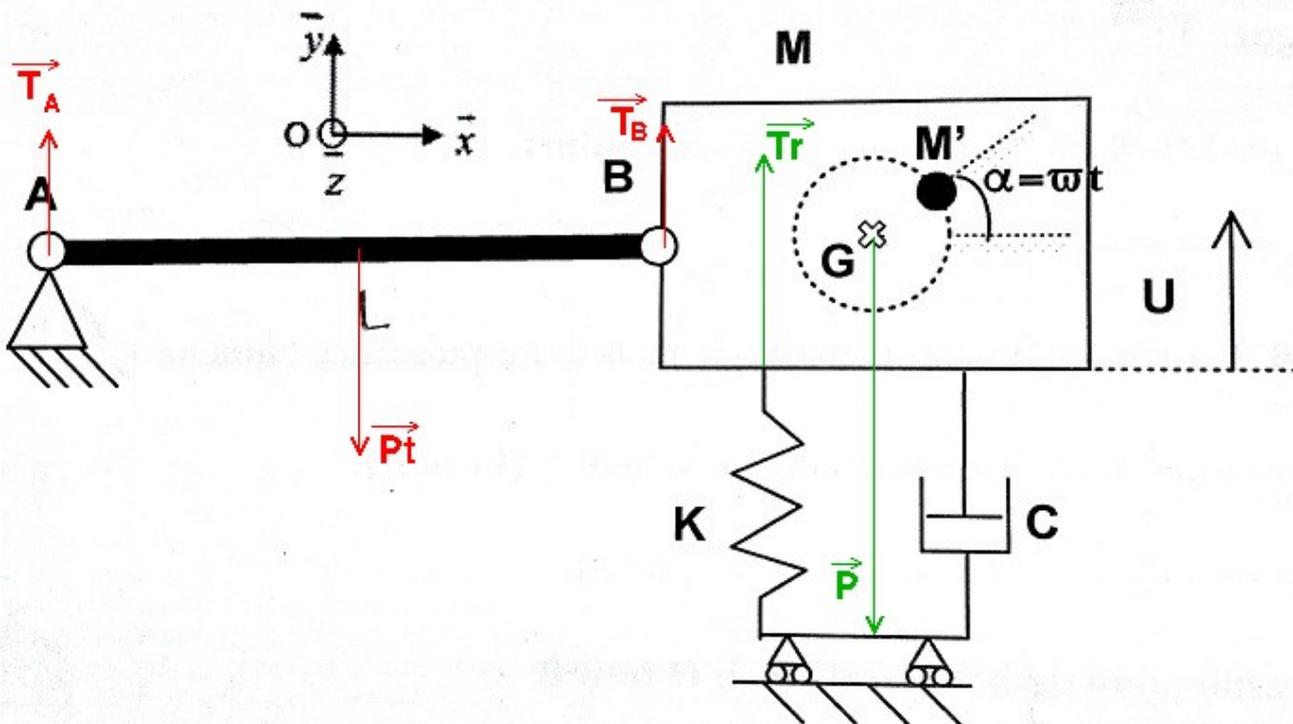


ÉTUDE D'UNE RÉSONANCE D'AMPLITUDE EN MÉCANIQUE

Partie A : Étude dynamique du système expérimental

I. Description du dispositif.

Un solide de Masse $M = 270\text{kg}$ est astreint à se déplacer verticalement dans le champ de pesanteur. Il est soumis à l'action d'un ressort de constante de raideur k et d'un amortisseur de constante C . Une tige homogène de masse $m_T = 90\text{kg}$ est reliée, grâce à deux liaisons pivots supposées parfaites du point de vue cinétique et du point de vue énergétique, à un point fixe par rapport à la terre, noté A , et d'autre part au solide de masse M par son extrémité B . Une masse quasi ponctuelle M' tourne autour de l'axe Gz à la vitesse angulaire ω , décrivant ainsi par rapport au solide de masse M , un cercle de rayon b .



II. Étude statique.

Le système est à l'équilibre : $\omega = 0$; $u = 0$ et la tige (AB) est horizontale.

La tige, mobile sans frottement autour de l'axe Az est en équilibre sous l'action de trois

forces :

* son poids $\vec{P}_t = m_T \cdot \vec{g} = -m_T \cdot g \cdot \vec{u}_y$;

* l'action de la liaison pivot en A modélisable par une force de vecteur $\vec{T}_A = T_A \cdot \vec{u}_y$;

* l'action du solide de masse M modélisable par une force de vecteur $\vec{T}_B = T_B \cdot \vec{u}_y$.

En absence de rotation autour de l'axe Az le théorème des moments conduit directement à :

$$L \cdot T_B - \frac{L}{2} \cdot m_T \cdot g = 0 \quad \text{soit :} \quad T_B = \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot g \quad .$$

Le solide de masse (M+M') est en équilibre sous l'action de trois forces :

* son poids $\vec{P} = (M+M') \cdot \vec{g} = -(M+M') \cdot g \cdot \vec{u}_y$;

* l'action du ressort dont le raccourcissement à l'équilibre est Δy : $\vec{T}_r = k \cdot \Delta y \cdot \vec{u}_y$;

* l'action de la tige qui, selon le principe des actions réciproques, est l'opposé de l'action du solide sur la tige : $-\vec{T}_B = -T_B \cdot \vec{u}_y$.

La résultante de ces trois forces est le vecteur nul. Cela conduit à :

$k \cdot \Delta y = (M+M') \cdot g + T_B$. En combinant les deux relations, on obtient la condition générale d'équilibre du système :

$$k \cdot \Delta y = \left(M + M' + \frac{1}{2} \cdot m_T \right) \cdot g \quad .$$

III. Étude dynamique.

La masse M' tourne maintenant autour de l'axe Gz par rapport au solide de masse M. Le déplacement du solide de masse M par rapport à sa position d'équilibre (ce que l'on appelle son élongation) est notée u. Cette élongation est supposée de valeur absolue toujours très inférieure à L de sorte que l'inclinaison de la tige par rapport à l'horizontale (notée θ) reste toujours suffisamment faible pour que l'on puisse poser, au premier ordre près :

$$\theta \approx \sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{u}{L} \quad ; \quad \cos(\theta) \approx 1 \quad .$$

a) étude dynamique de la masse ponctuelle.

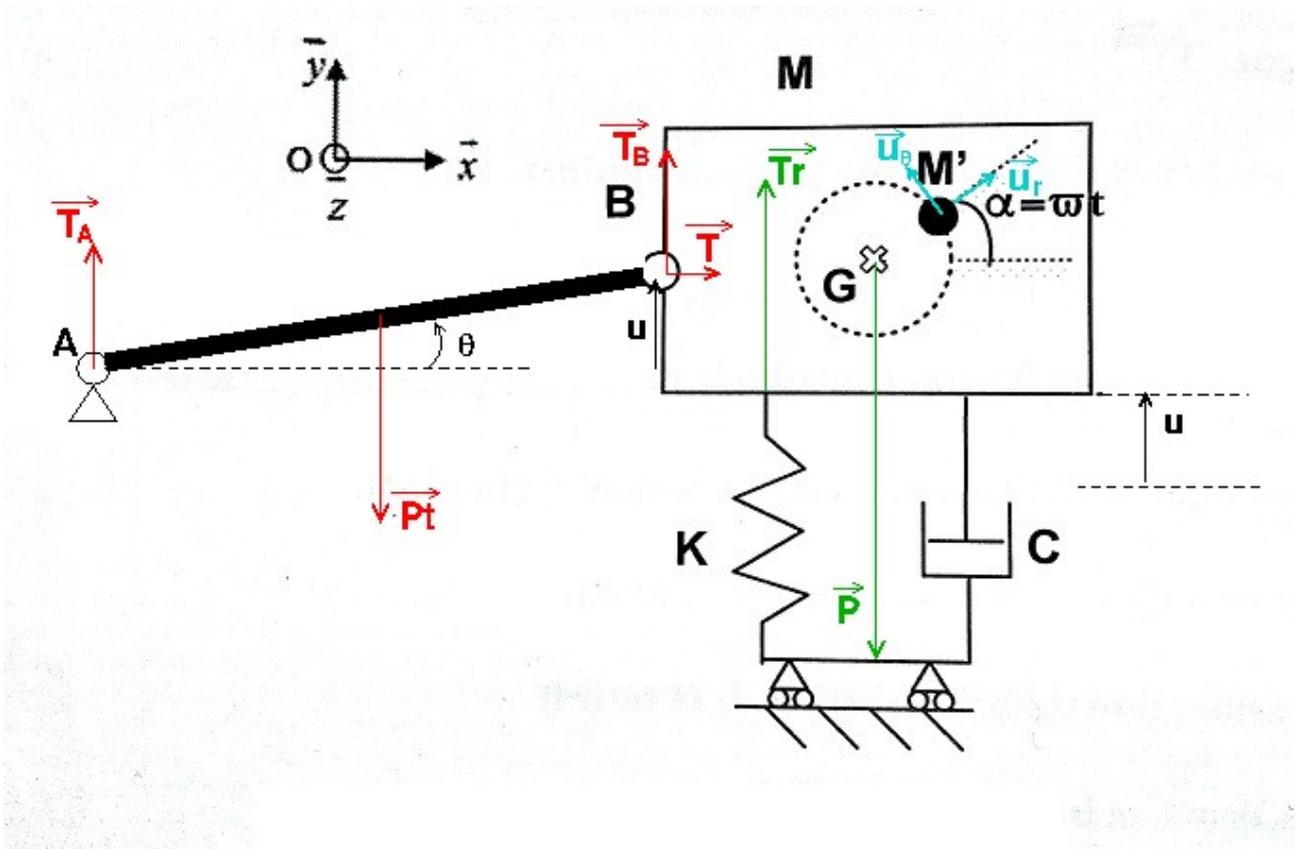
Remarques : l'angle θ est, pour plus de clarté, fortement exagéré sur la figure ; le sens du vecteur \vec{T} varie au cours du temps...

La masse ponctuelle est soumise à trois actions :

* son poids $\vec{P}' = M' \cdot \vec{g} = -M' \cdot g \cdot \vec{u}_y$;

* l'action du solide de masse M que l'on peut modéliser par une force de vecteur \vec{F} .

* un couple moteur permettant d'entretenir le mouvement de rotation.



Son accélération \vec{a} par rapport à la terre est la somme de deux vecteurs :

* son accélération relative, c'est à dire son accélération par rapport au solide de masse M. Le mouvement relatif étant circulaire et uniforme, cette accélération se limite à une accélération normale centripète : $\vec{a}_r = -b \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r$;

* son accélération d'entraînement qui est l'accélération du solide de masse M par rapport à la terre puisque ce solide est en translation (dans ce cas, l'accélération de Coriolis est nulle) : $\vec{a}_e = \ddot{u} \cdot \vec{u}_y$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$M' \cdot \vec{a} = M' \cdot \ddot{u} \cdot \vec{u}_y - M' \cdot b \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r = -M' \cdot g \cdot \vec{u}_y + \vec{F}$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{F} = M' \cdot ((g + \ddot{u}) \cdot \vec{u}_y - b \cdot \omega^2 \cdot \vec{u}_r) = M' \cdot ((g + \ddot{u}) \cdot \vec{u}_y - b \cdot \omega^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{u}_x + \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{u}_y]) .$$

b) étude dynamique de la tige.

Il s'agit d'un solide mobile autour de l'axe Az fixe par rapport à la terre. Elle est soumise à trois forces :

* son poids $\vec{P}_t = m_T \cdot \vec{g} = -m_T \cdot g \cdot \vec{u}_y$;

* l'action de la liaison pivot en A modélisable par une force de vecteur \vec{T}_A pas nécessairement verticale en dynamique mais de moment par rapport à l'axe de rotation nul ;

* l'action du solide de masse M modélisable par une somme de deux forces :

- une force verticale $\vec{T}_B = T_B \cdot \vec{u}_y$ comme en statique ;

- une force horizontale qui empêche le solide de masse M de vibrer horizontalement :
 $\vec{T} = T \cdot \vec{u}_x$.

Le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe de rotation est : $I_{Az} = \frac{1}{3} \cdot m_T \cdot L^3$.

Le théorème du moment cinétique appliquée à la tige et projeté sur l'axe Az s'écrit :

$$I_{Az} \cdot \ddot{\theta} = T_B \cdot L \cdot \cos(\theta) - m_T \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta) - T \cdot L \cdot \sin(\theta) = L \cdot \left[\left(T_B - \frac{m_T}{2} \cdot g \right) \cdot \cos(\theta) + T \cdot \sin(\theta) \right] .$$

Réfléchissons maintenant aux ordres de grandeurs. À l'équilibre, $T_B - \frac{m_T}{2} \cdot g = 0$; en

dynamique $T_B - \frac{m_T}{2} \cdot g$ représente donc la variation de cette grandeur entre la

dynamique et la statique soit la variation de T_B due au mouvement du solide de masse M. La cause de ce mouvement est la force \vec{F} explicitée précédemment due au

mouvement de la masse M'. Or la composante horizontale de cette force est sensiblement de même amplitude que la composante verticale. On peut en déduire que

T et $T_B - \frac{m_T}{2} \cdot g$ ont sensiblement même amplitude au cours du mouvement vibratoire.

Or, pour des valeurs de α très faibles : $\sin(\theta) \ll \cos(\theta)$. L'influence de la composante

T est donc totalement négligeable devant celle de $T_B - \frac{m_T}{2} \cdot g$. Le théorème du

moment dynamique s'écrit donc en excellente approximation :

$$I_{Az} \cdot \ddot{\theta} = L \cdot \left(T_B - \frac{m_T}{2} \cdot g \right) \cdot \cos(\theta) .$$

$$\text{Avec : } \ddot{\theta} = \frac{\ddot{u}}{L} ; \quad I_{Az} = \frac{m_T \cdot L^2}{3} ; \quad \cos(\theta) \approx 1 ;$$

On obtient finalement :

$$\frac{m_t}{3} \cdot \ddot{u} = T_B - \frac{m_T}{2} \cdot g \quad \text{soit : } T_B = \frac{m_T}{3} \cdot \ddot{u} + \frac{m_T}{2} \cdot g .$$

c) étude dynamique du solide de masse M

Ce solide, en translation par rapport à la terre avec l'accélération $\vec{a}_G = \ddot{u} \cdot \vec{u}_y$ est soumis aux forces suivantes :

* son poids $M \cdot \vec{g} = -M \cdot g \cdot \vec{u}_y$;

* l'action du ressort donc le raccourcissement est maintenant $(\Delta y - u)$:

$$\vec{T}_r = k \cdot (\Delta y - u) \cdot \vec{u}_y ;$$

* l'action de l'amortisseur : $\vec{F}_a = -C \cdot \dot{u} \cdot \vec{u}_y$;

* l'action de la masse M' qui, conformément au principe des actions réciproques, est l'opposé de l'action du solide de masse M sur la masse M' :

$$-\vec{F} = -M' \cdot \left((g + \ddot{u}) \cdot \vec{u}_y - b \cdot \omega^2 \cdot [\cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{u}_x + \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{u}_y] \right) .$$

Remarque : quelqu'un de familiarisé avec la notion de force d'inertie pourrait remarquer que cette action est la résultante du poids de la masse M' , de la force d'inertie centrifuge et de la force d'inertie d'entraînement... Cette notion n'est plus guère enseignée, au moins dans ce contexte...

* l'action de la tige qui, conformément au principe des actions réciproques, est l'opposé de l'action du solide sur la tige : $-T \cdot \vec{u}_x - T_B \cdot \vec{u}_y = -T \cdot \vec{u}_x - \left(\frac{m_T}{3} \cdot \ddot{u} + \frac{m_T}{2} \cdot g \right) \cdot \vec{u}_y$.

Le théorème de la résultante dynamique (seconde loi de Newton), en projection sur l'axe Gy conduit à la relation :

$$M \cdot \ddot{u} = -M \cdot g - C \cdot \dot{u} - M' \cdot g - M' \cdot \ddot{u} + M' \cdot b \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{m_T}{3} \cdot \ddot{u} - \frac{m_T}{2} \cdot g + k \cdot \Delta y - k \cdot u .$$

En tenant compte de la relation obtenue en statique : $k \cdot \Delta y = (M + M' + \frac{1}{2} \cdot m_T) \cdot g$, on obtient finalement :

$$\left(M + M' + \frac{m_T}{3} \right) \cdot \ddot{u} + C \cdot \dot{u} + k \cdot u = M' \cdot b \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) .$$

Partie B : étude de la résonance d'amplitude.

I. Équation différentielle du mouvement.

En posant : $m = M + M' + \frac{m_T}{3} = 300 \text{ kg}$, on obtient :

$$\boxed{m \cdot \ddot{u} + C \cdot \dot{u} + k \cdot u = M' \cdot b \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)} .$$

On se limite à l'étude du régime sinusoïdal forcé : le mouvement est sinusoïdal de même pulsation que l'excitation :

$$u = U m \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) .$$

II. Étude du régime sinusoïdal forcé.

Pour faciliter l'étude, on passe au complexe associé : à toute grandeur sinusoïdale on associe un complexe dont le module est l'amplitude et l'argument la phase. On pose donc : $\underline{u} = U m \cdot e^{(j\omega \cdot t + \phi)}$. Ainsi : $\dot{\underline{u}} = j\omega \cdot \underline{u}$; $\ddot{\underline{u}} = -\omega^2 \cdot \underline{u}$. L'équation différentielle précédente conduit à :

$$\underline{u} \cdot (k - m\omega^2 + jC\omega) = M' \cdot b \cdot \omega^2 \cdot e^{(j\omega \cdot t)} .$$

Posons :

$$\underline{U} = \frac{M' \cdot b \cdot \omega^2}{k - m \omega^2 + jC \omega} ;$$

L'amplitude du mouvement est ainsi :

$$Um = |\underline{U}| = \frac{M' \cdot b \cdot \omega^2}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + C^2 \omega^2}} .$$

La phase initiale de u est ainsi :

$$\phi = \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(M' \cdot b \cdot \omega^2) - \text{Arg}(k - m \omega^2 + jC \omega) = \text{Arg}(k - m \omega^2 - jC \omega)$$

Ce qui conduit à :

$$\tan(\phi) = \left(\frac{C \omega}{m \omega^2 - k} \right) .$$

La partie imaginaire du complexe dont on calcule l'argument étant toujours négative, le sinus du déphasage est nécessairement négatif ou nul :

$$\sin(\phi) \leq 0 \quad ; \quad \text{ce qui conduit à } \boxed{-\pi \leq \phi \leq 0} \quad (\text{modulo } 2\pi \text{ bien sûr}).$$

Cela permet de lever l'ambiguïté introduite par l'expression de la tangente : connaître la tangente ne permet de déterminer l'angle qu'à π radians près.

III. Fréquence propre de l'oscillateur.

Par définition, la fréquence propre d'un oscillateur, est la fréquence des oscillations libres (pas d'excitation extérieure permanente et périodique) dans le cas limite des frottements nuls ($C = 0$). L'équation différentielle du mouvement se simplifie alors :

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 \quad \text{soit : } \ddot{u} = -\frac{k}{m} \cdot u .$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$u = Um \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \phi)$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur. Sa fréquence propre est :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

IV. Étude de la résonance d'amplitude.

Il s'agit d'étudier la courbe $Um = f(\omega)$. Afin de simplifier l'étude théorique, il est intéressant d'obtenir une expression telle que ω n'apparaisse qu'au dénominateur.

Pour cela, divisons tous les termes de l'expression de \underline{U} par $m \cdot \omega^2$:

$$\underline{U} = \frac{\frac{M' \cdot b}{m}}{\frac{k}{m \omega^2} - 1 + \frac{j \cdot C}{m \omega}} = \frac{\frac{M' \cdot b}{m}}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + \frac{j \cdot C}{m \omega}} ;$$

De plus :

$$\frac{C}{m} = \frac{C}{m} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{C}{\sqrt{m \cdot k}} \cdot \omega_0 .$$

Posons : $\xi = \frac{C}{\sqrt{m \cdot k}}$ (grandeur sans dimension) ; $x = \frac{\omega_0}{\omega}$ (grandeur sans dimension) et

$A = \frac{M' \cdot b}{m}$ (grandeur homogène à une longueur). L'écriture du \underline{U} se simplifie ainsi :

$$\underline{U} = \frac{A}{x^2 - 1 + j\xi \cdot x}$$

L'amplitude des oscillations dépend de x selon la relation :

$$U_m = \frac{A}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + \xi^2 x^2}}$$

Posons : $P(x) = (x^2 - 1)^2 + \xi^2 x^2 = x^4 - (2 - \xi^2)x^2 + 1$. Il suffit d'étudier les variations de $P(x)$ pour avoir celle de l'amplitude U_m : à un minimum de $P(x)$ correspondra un maximum de U_m ...

La dérivée de $P(x)$ par rapport à x s'écrit :

$$P'(x) = 4x^3 - 2(2 - \xi^2)x = 2x(2x^2 - 2 + \xi^2)$$

La courbe expérimentale présente un maximum de U_m pour une valeur de x différente de zéro. Nous avons nécessairement $\xi^2 - 2 < 0$. Ainsi $P'(x)$ présente un extremum pour

une valeur x différente de zéro : $x_r = \sqrt{\frac{2 - \xi^2}{2}}$. Un rapide tableau de variation montre

que la valeur $x = x_r$ correspond à un minimum de $P(x)$ donc à un maximum de U_m .

Nous avons donc une résonance d'amplitude pour une pulsation ω_r vérifiant la relation :

$$x_r = \frac{\omega_0}{\omega_r} = \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{2}}$$

soit pour la pulsation :

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{2}}}$$

Hypothèse simplificatrice : la courbe de résonance expérimentale correspond à une résonance aiguë, donc à un amortissement faible. Nous allons donc supposer :

$$\xi^2 \ll 1$$

Nous serons amenés à vérifier la cohérence de cette hypothèse ultérieurement.

Dans ces conditions, nous pouvons considérer que la résonance d'amplitude se produit à une pulsation très proche de la pulsation propre.

$$\omega_r \approx \omega_0$$

La courbe fournie conduit à :

$$\omega_r \approx 852 \text{ tours par min} \approx \frac{852}{60} \text{ tours par seconde} \approx \frac{852 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} \approx 89,2 \text{ rad/s}$$

Nous obtenons donc une pulsation propre et une fréquence propre très proches de :

$$\omega_0 \approx 89,2 \text{ rad/s} ; f_0 \approx \frac{852}{60} \approx 14,2 \text{ Hz}$$

Nous en déduisons la valeur de la constante de raideur du ressort :

$$k = m \cdot \omega_0^2 \approx 300 \cdot 89,2^2 \approx 2,39 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

V. Détermination de la constante C de l'amortisseur.

La courbe expérimentale permet la détermination de la largeur de bande passante :

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta \omega \approx 40 \text{ tours/min} \approx \frac{40 \cdot 2\pi}{60} \approx 4,19 \text{ rad/s}$$

Nous allons en déduire la valeur de C. L'amplitude maximale correspond sensiblement à 22,2mm, valeur obtenue pour $x \approx 1$. L'expression théorique de cette amplitude à la résonance est :

$$U_{m(max)} = \frac{A}{\xi} .$$

Les limites de bande passante correspondent à : $U_m = \frac{U_{m(max)}}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\xi \sqrt{2}}$; ces limites correspondent donc à $P(x) = 2\xi^2$. Les valeurs de x aux limites de bandes passantes sont donc les solutions positives de l'équation :

$$x^4 - (2 - \xi^2)x^2 + 1 = 2\xi^2 \quad \text{soit:} \quad x^4 - (2 - \xi^2)x^2 + 1 - 2\xi^2 = 0 .$$

Ces racines vérifient :

$$x_1^2 = \frac{2 - \xi^2 + \sqrt{\xi^4 + 4\xi^2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2^2 = \frac{2 - \xi^2 - \sqrt{\xi^4 + 4\xi^2}}{2} .$$

Le calcul est assez compliqué dans le cas général. Heureusement, nous sommes dans une situation telle que $\xi^2 \ll 1$. Cela implique aussi : $\xi^4 \ll \xi^2$ et $\xi^2 \ll \xi$. D'où les simplifications :

$$x_1^2 \approx \frac{2 - \xi^2 + 2\xi}{2} \approx 1 + \xi \quad \text{et} \quad x_2^2 \approx \frac{2 - \xi^2 - 2\xi}{2} \approx 1 - \xi .$$

On en déduit les deux pulsations aux limites de la bande passante :

$$\omega_1 \approx \frac{\omega_0}{x_1} \approx \omega_0 \cdot (1 + \xi)^{-1} \approx \omega_0 \cdot (1 - \xi) \quad \text{et} \quad \omega_2 \approx \frac{\omega_0}{x_2} \approx \omega_0 \cdot (1 - \xi)^{-1} \approx \omega_0 \cdot (1 + \xi) .$$

Remarque : ces approximations consistent en fait à effectuer des développements limités de Taylor au premier ordre en ξ . La largeur relative de bande passante se définit par :

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \approx \xi .$$

Numériquement :

$$\xi \approx \frac{4,19}{89,2} \approx 4,69 \cdot 10^{-2} .$$

Remarque : poser précédemment $\omega_r \approx \omega_0$ nous avait conduit à poser : $\xi^2 \ll 1$ et nous obtenons : $\xi^2 \approx 2,2 \cdot 10^{-3}$. L'approximation est justifiée compte tenu des lectures graphiques. Concernant les approximations faites pour obtenir la largeur relative de bande passante, on peut se demander si les approximations successives sont bien légitimes. En toute rigueur, un développement limité rigoureux des pulsations de coupures jusqu'à l'ordre 4 en ξ conduit à :

$$\omega_2 = \omega_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \xi + \frac{5}{8} \cdot \xi^2 + \frac{3}{4} \cdot \xi^3 + o(\xi^4) \right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \xi + \frac{5}{8} \cdot \xi^2 - \frac{3}{4} \cdot \xi^3 + o(\xi^4) \right) ;$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \xi + \frac{3}{2} \cdot \xi^3 + o(\xi^4) .$$

L'approximation consistant à négliger $\frac{3}{2} \cdot \xi^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-3}$ est un peu limite puisque nous avons posé : $\xi \approx 4,69 \cdot 10^{-2}$; $\frac{3}{2} \cdot \xi^2$ n'est pas vraiment négligeable devant ξ ! Nous allons tout de même accepter l'approximation pour ne pas rendre trop calculatoire ce problème et compte tenu des approximations graphiques.

Nous en déduisons la constante C :

$$C = \xi \cdot \sqrt{m \cdot k} \approx 4,69 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{300 \cdot 2,39 \cdot 10^6} \approx 1,26 \cdot 10^3 \text{ Ns/m} .$$

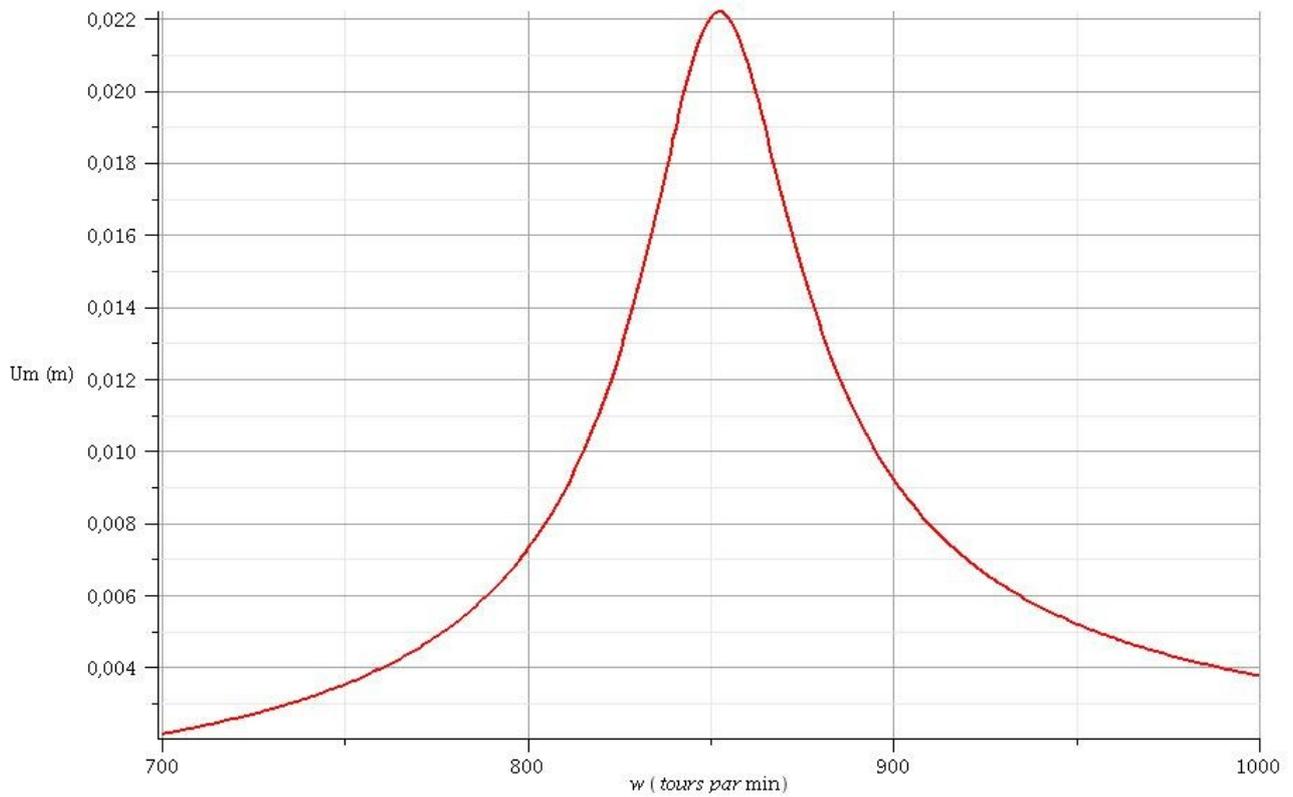
L'amplitude à la résonance s'exprime ainsi :

$$U_{m(max)} = \frac{A}{\xi} = \frac{M' \cdot b}{\xi \cdot m} .$$

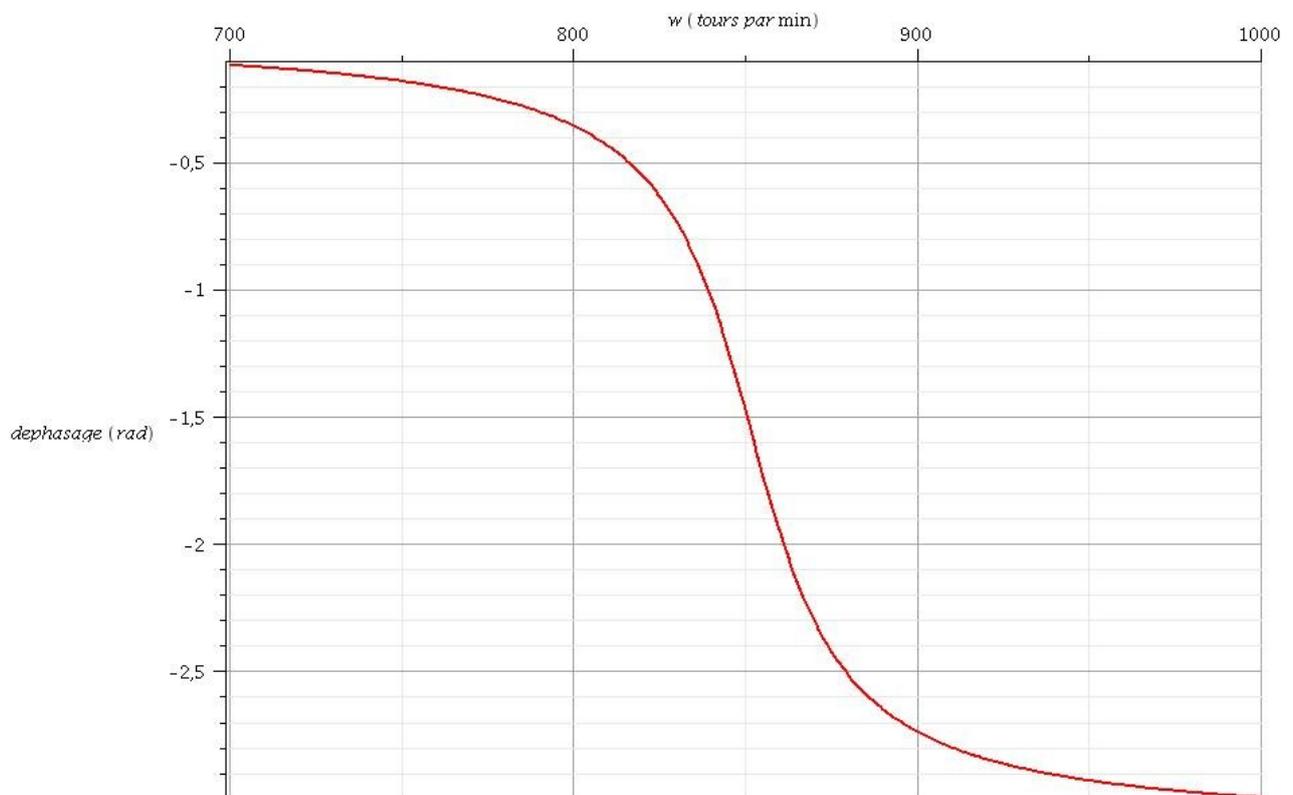
Cela permet une détermination de la valeur du produit $M' \cdot b$:

$$\boxed{M' \cdot b = U_{m(max)} \cdot \xi \cdot m \approx 2,22 \cdot 10^{-2} \cdot 4,69 \cdot 10^{-2} \cdot 300 \approx 0,313 \text{ kg m}} .$$

Voici la courbe de résonance d'amplitude théorique qui tient compte des valeurs calculées. Elle semble très proche de la courbe expérimentale fournie.



En complément, je joins la courbe correspondant aux variations du déphasage en fonction de ω . On remarque en particulier que le déphasage à la résonance vaut $-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.



[retour à la page principale](#)