Ressorts équivalents & Condensateurs équivalents

Si l'étude des associations en parallèle ne pose en général pas de difficulté majeure aux étudiants, il en va tout autrement des associations en série... Il n'est pas évident de comprendre pourquoi, lorsque la masse des ressorts est d'influence négligeable, la tension se conserve le long des ressorts. De même pour les condensateurs en série, le fait que tous les condensateurs acquièrent la même charge n'est pas vraiment évident...

1 Association de deux ressorts en parallèle

Ces deux ressorts doivent avoir à chaque instant mêmes longueurs. Leurs longueurs à vide Lo est la même. Leurs allongements sont donc à chaque instant identiques. À un instant quelconque, ils exercent sur le solide auquel ils sont liés à leurs extrémités inférieures les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ telles que :

$$F_1 = k_1.\triangle L \quad ; \quad F_2 = k_2.\triangle L$$

Ces forces étant à chaque instant colinéaires et de même sens, elles sont équivalentes à une force unique $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ d'intensité : $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \cdot \triangle L$. Cette force résultante pourrait être exercée par un ressort unique ayant la même longueur à vide et le même allongement que les ressorts réels ; ce ressort unique serait donc équivalent à l'association des deux ressorts réels. En notant k_e la constante de ce ressort équivalent, on obtient :

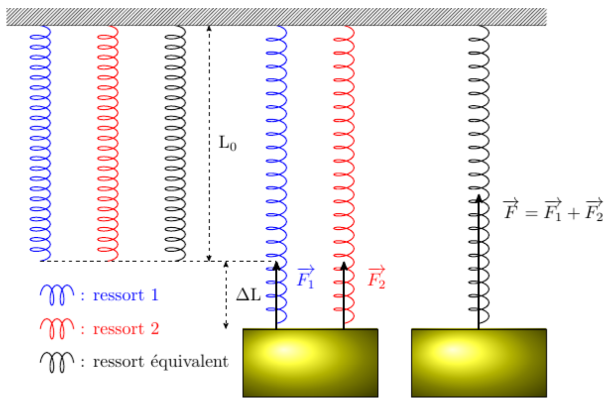

FIGURE 1 –

$$(k_1 + k_2) \cdot \triangle L = k_e.\triangle L$$

Puisque : $\triangle L \neq 0$:

$$\boxed{k_e = k_1 + k_2}$$

2 Solide intercalé entre deux ressorts

Cette situation est très fréquente. Elle permet aux ressorts de travailler à la fois en compression et en extension tout en gardant une direction fixe, ce qui est assez délicat à obtenir expérimentalement avec un seul ressort car il faut alors prévoir un dispositif de guidage du ressort. Le schéma représente les deux ressort alignés verticalement mais le raisonnement reste valide avec deux ressorts horizontaux ou deux ressorts le long d'un plan incliné. Le raisonnement est général : il s'applique à la fois à la statique et à la dynamique : aucune hypothèse particulière n'est faite sur le mouvement (ou l'absence de mouvement) de la boule.

Soit deux ressorts de longueurs à vide L_{01} et L_{02}. La distance entre les deux supports fixes est ajustée de sorte que, lorsque le ressort n° 1 possède sa longueur à vide, il en est de même du ressort n° 2. Dans le cas où le solide intercalé est une boule, cela suppose que la distance entre les deux supports fixe est : $L_{01} + L_{01} + D$ où D désigne le diamètre de la boule. Cela correspond à la situation de gauche sur le schéma.

Supposons maintenant une situation quelconque (situation centrale sur le schéma) où le ressort n° 1 possède une longueur $L_1 = L_{01} + \Delta L$.

Puisque la distance entre les supports est fixe et que la hauteur du solide intercalé est fixe, si le ressort n° 1 s'allonge de ΔL,

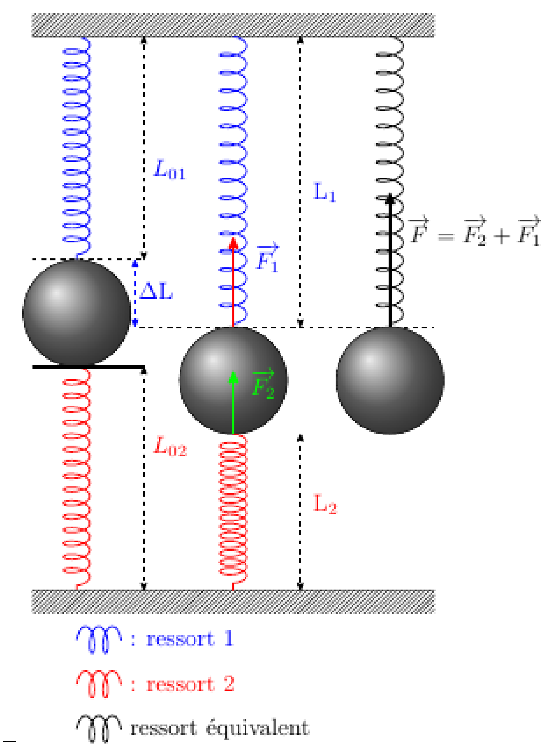

FIGURE 2 –

le ressort n° 2 se raccourcit nécessairement de la même longueur ΔL : $L_2 = L_{02} - \Delta L$.

Si le ressort n° 1 s'allonge, le ressort n° 2 se raccourcit et inversement. Conséquence : les deux ressorts exercent donc sur le solide des forces de même direction et de même sens. L'ensemble des deux ressorts se comportent donc comme un ressort unique qui, pour le même allongement ΔL exercerait sur le solide la force : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Les vecteurs étant colinéaires et de mêmes sens :

$$\|\overrightarrow{F}\| = \|\overrightarrow{F_1}\| + \|\overrightarrow{F_2}\|$$

Si on note $\mathrm{k_e}$ la constante de raideur du ressort équivalent :

$$k_e \cdot \Delta L = k_1 \cdot \Delta L + k_2 \cdot \triangle L$$

Puisque : $\Delta L \neq 0$:

$$\boxed{k_e = k_1 + k_2}$$

On obtient le même résultat qu'avec deux ressorts en parallèle.

3 Association de deux ressorts en série

Il faut connaître deux lois de la physique :

1° le principe des actions réciproques (principe de l'action et de la réaction) : si un corps 1 exerce sur un corps 2 une force $\overrightarrow{F_{12}}$, le corps 2 exerce sur le corps 1 au même instant une force $\overrightarrow{F_{21}}$ égale à $-\overrightarrow{F_{12}}$.

2° le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton). Je ne développe pas ...

Je considère deux ressorts 1 et 2 de masses d'influence négligeable, de longueurs à vide respectives L_{01} et L_{02}, de constantes de raideurs respectives k1 et k2 et je cherche la constante de raideur k du ressort équivalent (voir schéma ci-dessous). L'association série des deux ressorts exerce une force de vecteur $\vec{F}$ sur la main d'un manipulateur qui tire les ressorts vers le bas ou sur un objet accroché comme sur le schéma. Le ressort équivalent subit un allongement $\triangle L$ tel que : $F = k_e.\triangle L$; sa longueur à vide est $L_0 = L_{01} + L_{02}$. Le ressort 2, qui exerce la force $\vec{F}$ subit un allongement $\triangle l_2$ tel que $F = k_2.\triangle l_2$.

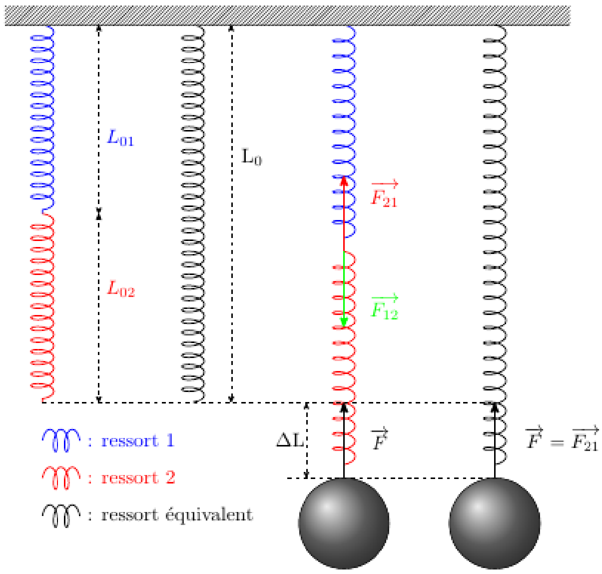

FIGURE 3 –

Appliquons maintenant la deuxième loi de Newton au ressort n°2 : Les actions extérieures sont :

* la force exercée par le ressort 1 : $\overrightarrow{F_{12}}$

* le poids du ressort : $m_2 \cdot \overrightarrow{g}$

* la force exercée par la main du manipulateur ou par l'objet accroché ; selon le principe des actions réciproques, cette force est $-\overrightarrow{F}$.

Cela donne :

$\overrightarrow{F_{12}} + m_2 \cdot \overrightarrow{g} - \overrightarrow{F} = m_2 \cdot \overrightarrow{a_{G2}}$

(accélération du centre d'inertie G2 du ressort 2)

En posant : m2=0, on obtient :

$\overrightarrow{F_{12}} - \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. La force exercée par le ressort 2 sur le ressort 1 est, par application du principe des actions réciproques : $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F}$. Donc : $F_{21} = k_1.\triangle l_1 = F$

En faisant la synthèse, on obtient :

$F = k_e \cdot \triangle l = k_2 \cdot \triangle l_2 = k_1 \cdot \triangle l_1$

Puisque, évidemment : $\triangle l = \triangle l_1 + \triangle l_2$:

$\frac{F}{k_e} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$

Puisque : $F \neq 0$, on obtient le résultat :

$$\boxed{\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Il est important de remarquer que cette relation n'est valide que si les masses des ressorts sont d'influence négligeables.

4 Association de deux condensateurs en parallèle

On considère une association de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 insérés dans un circuit quelconque. À un instant donné, la tension commune aux deux condensateurs est u, la charges des condensateurs étant respectivement q_1 et q_2 pour les armatures de gauche sur le schéma et $-q_1$ et $-q_2$ pour les armatures de droite. Le condensateur équivalent est le condensateur unique de capacité C_e qui, sous la même tension U, acquiert sur son armature de gauche la charge :

$$q = q_1 + q_2$$

Cela conduit à :

$$C_e \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U$$

Le résultat doit être valide pour : $U \neq 0$, donc :

$$\boxed{C_e = C_1 + C_2}$$

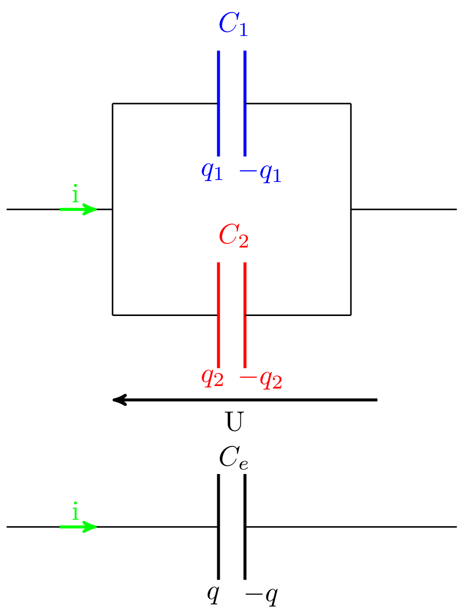

FIGURE 4 –

5 Association de deux condensateurs en série

L'armature gauche du condensateur n° 1 et l'armature droite du condensateur n° 2 constituent un ensemble de deux conducteurs séparés du reste du circuit par les isolants (diélectriques) présents entre les armatures des deux condensateur. Cet ensemble reste électriquement neutre pendant la charge (ou la décharge) du condensateur. Ces deux armatures portent donc à chaque instant des charges opposées que je note (q) et (-q) conformément au schéma ci-contre. Les deux armatures d'un même condensateur doivent avoir à chaque instant des charges opposées ; d'où la répartition de charges précisée sur le schéma. Ainsi la charge de l'armature gauche du premier condensateur et la charge de l'armature droite du second sont deux charges opposées, ce qui est cohérent avec le fait que les fils de connexion sont parcourus par des courants de même intensité i.

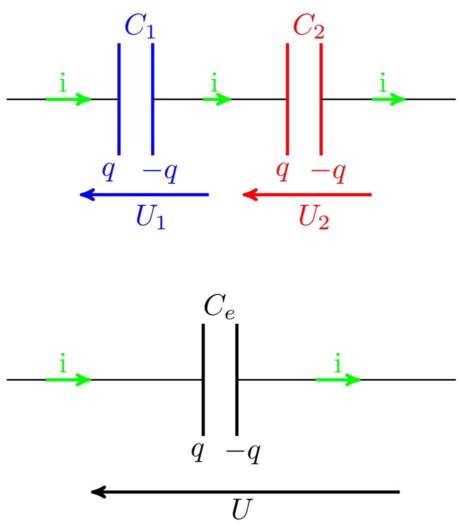

FIGURE 5 –

Dans ces conditions, le condensateur équivalent de capacité $C_e$est celui qui, sous la tension $U = U_1 + U_2$ est capable d'accumuler la charge q. Les charges de l'armature droite du condensateur n° 1 et de l'armature gauche du condensateur n° 2 ne doivent pas être prises en compte puisqu'elles ne participent pas à la création de courant dans le reste du circuit. On obtient ainsi :

$$\frac{q}{C_e} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

Le résultat doit être valide pour $q \neq 0$:

$$\boxed{\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Conclusion : le calcul de la raideur équivalente et le calcul de la capacité équivalente sont analogues. On peut aussi remarquer que, pour les deux types d'associations, la tension électrique dans un cas, la force dans l'autre ont le même comportement. On parle de grandeurs analogues. Il en est de même de la charge électrique et de l'allongement. On retrouve ces analogies en étudiant d'une part l'oscillateur mécanique avec frottements fluides, d'autre part l'oscillateur constitué d'une association série RLC...

retour à la page principale