

Golf : modélisation d'un putt puis mesure de la vitesse de roulement d'un green à l'aide d'un stimpmètre

Résumé

En première partie, il s'agit de modéliser le mouvement d'une balle de golf lors d'un « put » sur un green assimilable à un plan incliné, la balle devant remonter la pente. La balle étant initialement immobile, l'action du « putter » lui confère un mouvement de translation de vitesse V_0 . Il s'agit de montrer que, compte tenu des frottements, on obtient une très courte phase transitoire au cours de laquelle le mouvement passe d'une simple translation à un roulement sans glissement. La modélisation de l'action du gazon étant quelque peu aléatoire, je commence par étudier le mouvement sur un sol suffisamment dur pour que les lois de Coulomb sur les frottements entre solide s'appliquent. Une extrapolation à une surface engazonnée est ensuite présentée.

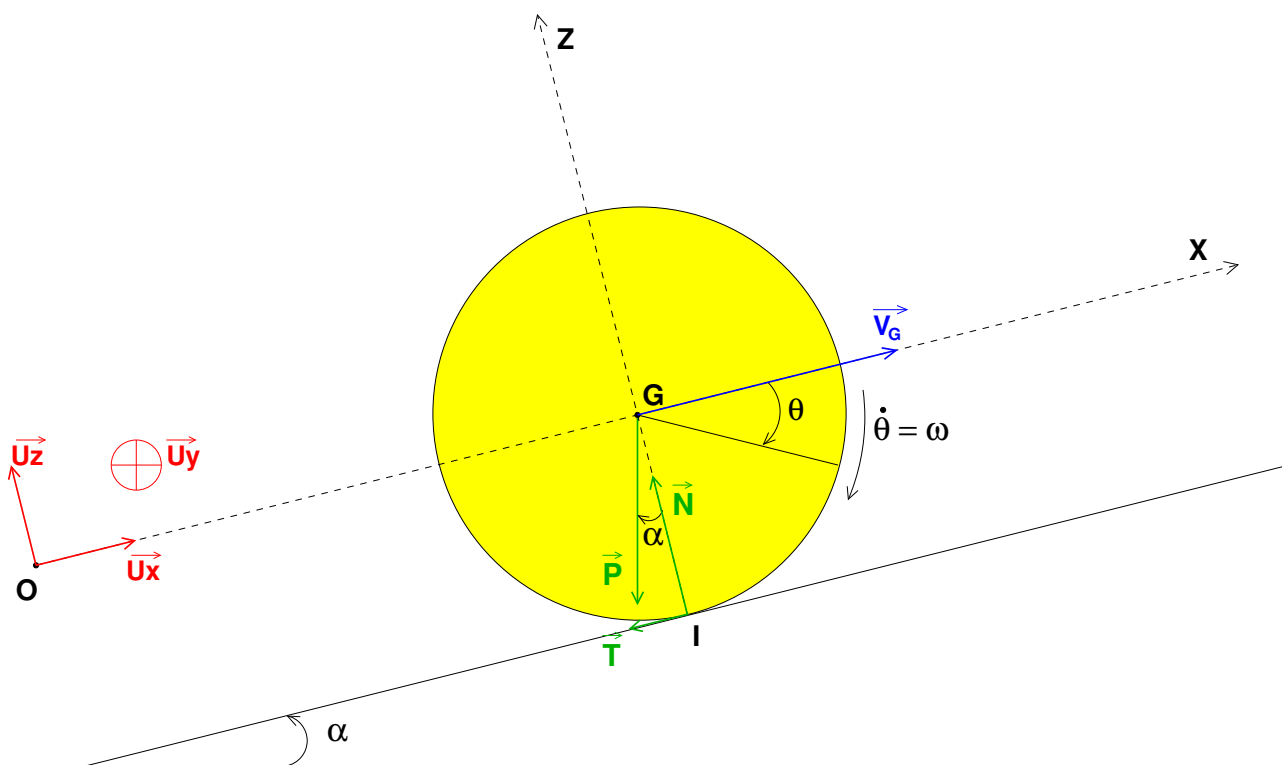
La seconde partie décrit la méthode de mesure de la vitesse de roulement d'un green à l'aide d'un stimpmètre (« stimp-meter » en anglais et « greenvite » en français).

Première partie

: Mouvement d'une balle de golf lors d'un putt.

1 Présentation du problème

Une boule homogène de masse m et de rayon R peut glisser ou rouler le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'étude est menée dans un repère $R : (O, x, y, z)$ fixe par rapport à la surface plane, ce repère est considéré comme galiléen. On suppose valides les lois de Coulomb sur les frottements entre solides. La boule est soumise à deux actions extérieures : son poids et la réaction du sol que l'on peut considérer comme une somme de deux forces : une réaction tangentielle et une réaction normale (voir schéma ci-dessous)



La vitesse de glissement au point de contact I est la vitesse du point I considéré comme appartenant à la boule puisque le plan incliné est fixe. On définit le vecteur rotation propre de la boule :

$$\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{U}_y$$

$$\vec{V}_g = \vec{V}_{(I)} = \vec{V}_G + \vec{IG} \wedge \vec{\Omega} = V_G \cdot \vec{U}_x + R \cdot \vec{U}_z \wedge \omega \cdot \vec{U}_y$$

$$\vec{V}_g = (V_G - R.\omega) . \vec{U}_x \quad (1)$$

2 Théorème généraux de la dynamique

Théorème du centre d'inertie (Relation Fondamentale de la Dynamique) :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = m.\vec{a}_G \quad (2)$$

En projetant :

$$N = m.g. \cos(\alpha) \quad (3)$$

$$m.a_G = -T - m.g. \sin(\alpha) \quad (4)$$

Le théorème de König n° 2 affirme que le moment dynamique en G est le même dans le repère galiléen (R) et dans le repère barycentrique (G,x,y,z). Il est donc possible d'appliquer le théorème du moment dynamique en G dans le repère barycentrique, même si celui-ci n'est pas galiléen. En notant : $J = \frac{2}{5}m.R^2$ le moment d'inertie de la boule par rapport à l'axe (G,y) :

$$J.\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{GI} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) = -R.\vec{U}_z \wedge (-T.\vec{U}_x) = R.T.\vec{U}_y$$

$$\frac{2}{5}m.R.\frac{d\omega}{dt} = T \quad (5)$$

3 Passage du glissement sans roulement au roulement sans glissement

La balle est frappée de sorte qu'à l'instant de date $t = 0$, la vitesse de G soit V_0 (valeur positive) avec une absence de rotation propre : $\omega_0 = 0$. Dans ces conditions, la vitesse de glissement a la direction et le sens de \vec{U}_x ; la boule glisse sans rouler sur la surface inclinée; Le vecteur \vec{T} est orienté suivant la direction et le sens de $(-\vec{V}_g)$ soit conformément à la figure. La loi de Coulomb sur le frottement solide en cas de glissement s'écrit :

$$T = f.N \quad (6)$$

où f désigne le coefficient de frottement dynamique entre la boule et la surface plane. En tenant compte de cette relation et de la relation (3), la relation (3) devient :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{5f.g}{2R} \cdot \cos(\alpha) \quad (7)$$

La relation (4) devient :

$$a_G = -g.(f. \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \quad (8)$$

L'accélération étant négative, la vitesse V_G diminue alors que la vitesse angulaire augmente selon (7) : dans ces conditions, la vitesse de glissement diminue jusqu'à s'annuler à une date t_1 qui correspond à la fin du mouvement de glissement et au début du mouvement de roulement sans glissement. En intégrant (7) et (8) et en reportant dans (1) :

$$V_G = -g.(f. \cos(\alpha) + \sin(\alpha)).t + V_0 \quad ; \quad \omega = \frac{5f.g}{2R} \cdot \cos(\alpha).t$$

$$V_g = V_0 - t.g. \left[f. \cos(\alpha) + \sin(\alpha) + \frac{5f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right] = V_0 - t.g. \left[\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right] \quad (9)$$

Pendant cette phase transitoire, la balle glisse tout en tournant sur elle-même : ni ω ni V_g ne sont des valeurs nulles. La durée de cette phase transitoire est ainsi :

$$t_1 = \frac{V_0}{g. \left[\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right]} \quad (10)$$

La vitesse de G obtenue en fin de cette phase transitoire est :

$$V_{G1} = V_0 - \frac{V_0. [f. \cos(\alpha) + \sin(\alpha)]}{\left[\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right]} = V_0. \frac{\frac{5}{2}.f. \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha)} \quad (11)$$

La puissance instantanée de la force de frottement est :

$$p = \vec{T} \cdot \vec{V}_g = -f.m.g. \cos(\alpha) \left[V_0 - t.g. \left(\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right) \right] \quad (12)$$

Le travail de cette force de frottement durant cette phase transitoire est :

$$W_{(\vec{T})} = \int_0^{t_1} p.dt = -f.m.g. \cos(\alpha) \left[V_0.t_1 - \frac{1}{2}g.t_1^2 \cdot \left(\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right) \right] \quad (13)$$

Après simplification en tenant compte de (10) :

$$W_{(\vec{T})} = -\frac{1}{2}m.V_0^2 \cdot \frac{f \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha)} \quad (14)$$

Ce travail est évidemment négatif...

La distance d_1 parcourue par le centre G pendant la durée t_1 de cette phase transitoire est :

$$d_1 = \int_0^{t_1} V_G.dt = V_0.t_1 - \frac{1}{2}g.t_1^2 \cdot [\sin(\alpha) + f \cdot \cos(\alpha)]$$

En tenant compte de (10) et après simplification :

$$d_1 = \frac{V_0^2 \cdot [\sin(\alpha) + 6f \cdot \cos(\alpha)]}{2g \cdot \left[\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right]^2} \quad (15)$$

4 Étude du mouvement de roulement sans glissement

Pour $t \geq t_1$, la vitesse de glissement est devenu nulle : on obtient un mouvement de roulement sans glissement. Selon (1) :

$$V_G = R.\omega \quad ; \quad a_G = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (16)$$

Selon (5) :

$$T = \frac{2}{5}m.a_G$$

Selon (4) :

$$m.a_G = -\frac{2}{5}m.a_G - m.g \cdot \sin(\alpha)$$

D'où l'expression de l'accélération :

$$a_G = -\frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin(\alpha) \quad (17)$$

Le théorème de König n° 3 permet d'affirmer que l'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de rotation et de l'énergie cinétique de translation mesurée dans le repère barycentrique :

$$E_c = \frac{1}{2}m.V_G^2 + \frac{1}{2}J.\omega^2$$

Soit :

$$E_c = \frac{7}{10}m.V_G^2 \quad (18)$$

Remarque importante : en absence de glissement, la puissance de l'action de la surface inclinée sur la boule peut s'écrire :

$$p_1 = \vec{V}_g \cdot (\vec{N} + \vec{T}) = 0$$

Pendant la phase de roulement sans glissement, la seule force qui travaille est donc le poids.

5 Distance maximale parcourue

Il s'agit de déterminer la distance d_m parcourue par le centre G entre l'instant initiale et l'instant où la vitesse de la bille s'annule. Il suffit d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre ces deux instants **en prenant en compte le travail du poids sur la totalité du parcours et le travail de \vec{T} pendant la phase transitoire**. On obtient :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}m.V_0^2 = W_{(\vec{P})} + W_{(\vec{T})}$$

$$-\frac{1}{2}m.V_0^2 = -m.g.d_m \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2}m.V_0^2 \cdot \frac{f \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha)} \quad (19)$$

$$d_m = \frac{V_0^2}{2g \cdot \sin(\alpha)} \cdot \frac{[2 \sin(\alpha) + 5f \cdot \cos(\alpha)]}{[2 \sin(\alpha) + 7f \cdot \cos(\alpha)]} \quad (20)$$

Application numérique : on choisit : $V_0=3,0\text{m/s}$; $g=9,8\text{m/s}^2$; $\alpha = 5^\circ$; $f=0,2$. Le calcul conduit à :

$$d_m \approx 3,9\text{m}$$

Remarque : « oublier » dans le calcul le travail de \vec{T} conduit à :

$$-\frac{1}{2}m.V_0^2 = -m.g.d_m \cdot \sin(\alpha) \quad \text{soit :} \quad d_m = \frac{V_0^2}{2g \cdot \sin(\alpha)} \approx 5,3\text{m}$$

Soit à une erreur par excès d'environ 36% !

6 Cas où le plan incliné est remplacé par le green d'un golf incliné du même angle.

Modéliser l'action du gazon sur la balle est nettement plus complexe ! Je fais la tentative suivante :

Je considère que le gazon sous la balle, comprimé par le poids de celle-ci se comporte approximativement comme un solide ; je conserve donc les lois de Coulomb.

Je prends en compte l'énergie perdue par la balle pour déformer et « écraser » l'herbe sur son passage ; J'admets que cette action du gazon sur la balle est modélisable par une force de frottement supplémentaire d'intensité constante qui, pour simplifier l'écriture, sera notée : $\vec{F}^f = -k.m.g.\vec{U}_x$ avec k : réel positif. **Cette force fournit un travail négatif sur la totalité du parcours, contrairement à la réaction tangentielle qui ne travail qu'en cas de vitesse de glissement non nulle**. La validité de cette hypothèse sera justifiée dans la dernière partie de cette étude.

Le théorème de l'énergie cinétique est ainsi modifié :

$$-\frac{1}{2}m.V_0^2 = -m.g.d_m \cdot [k + \sin(\alpha)] - \frac{1}{2}m.V_0^2 \cdot \frac{f \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha)}$$

La formule (19) devient :

$$d_m = \frac{V_0^2}{2.g \cdot [k + \sin(\alpha)]} \cdot \frac{[2 \sin(\alpha) + 5f \cdot \cos(\alpha)]}{[2 \sin(\alpha) + 7f \cdot \cos(\alpha)]} \quad (21)$$

La valeur de k , pour un green de qualité moyenne peut être évalué grâce à un stimpmètre (voir la dernière partie de cette étude) : $k=0,11$. Pour donner au coefficient de frottement f une valeur réaliste, on peut considérer que la distance parcourue pendant la phase transitoire de roulement est d'environ 10cm. La relation (15) conduit à :

$$2g.d_1 \cdot \left[\sin(\alpha) + \frac{7f}{2} \cdot \cos(\alpha) \right]^2 = V_0^2 \cdot [\sin(\alpha) + 6f \cdot \cos(\alpha)]$$

Le calcul, à l'aide d'une calculatrice scientifique, conduit à :

$$f \approx 0,31$$

En retenant ces valeurs de k et f , la relation (21) conduit à une distance parcourue sur le green avant arrêt :

$$d_m \approx 1,7\text{m}$$

Remarque : « oublier » dans le calcul le travail de \vec{T} conduit à :

$$d_m = \frac{V_0^2}{2g \cdot [0,11 + \sin(\alpha)]} \approx 2,3\text{m}$$

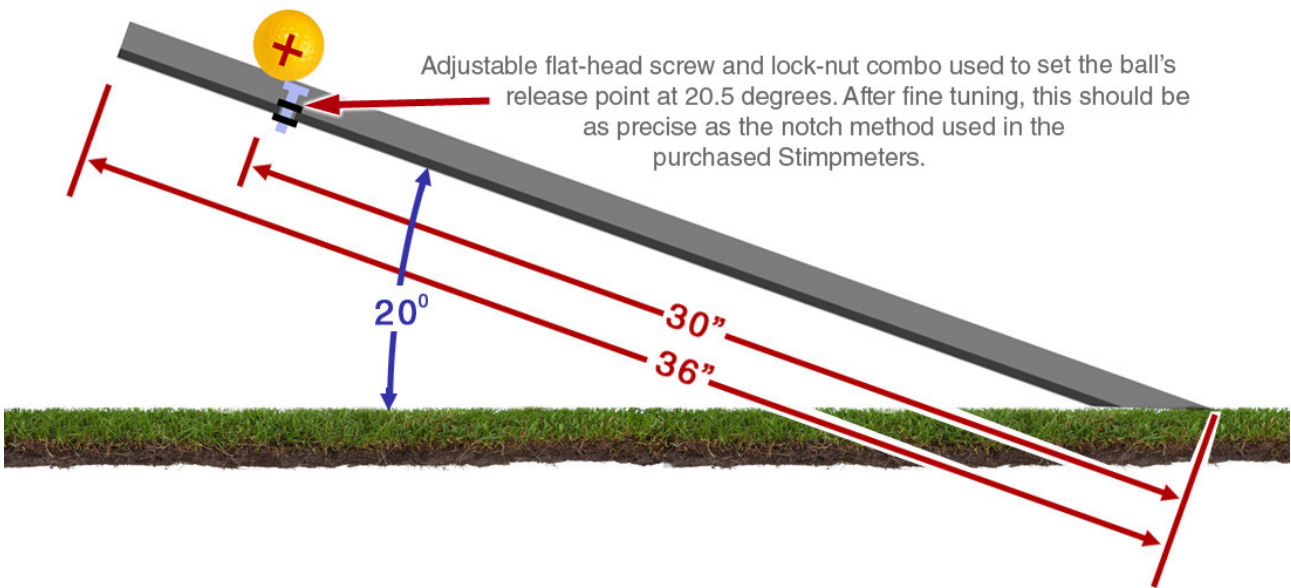
Soit à une erreur par excès d'environ 35% !

Toutes choses égales par ailleurs, la distance parcourue par la balle sur le gazon est bien sûr nettement inférieure à celle parcourue sur une surface dure et lisse : plus de deux fois plus faible!

Deuxième partie

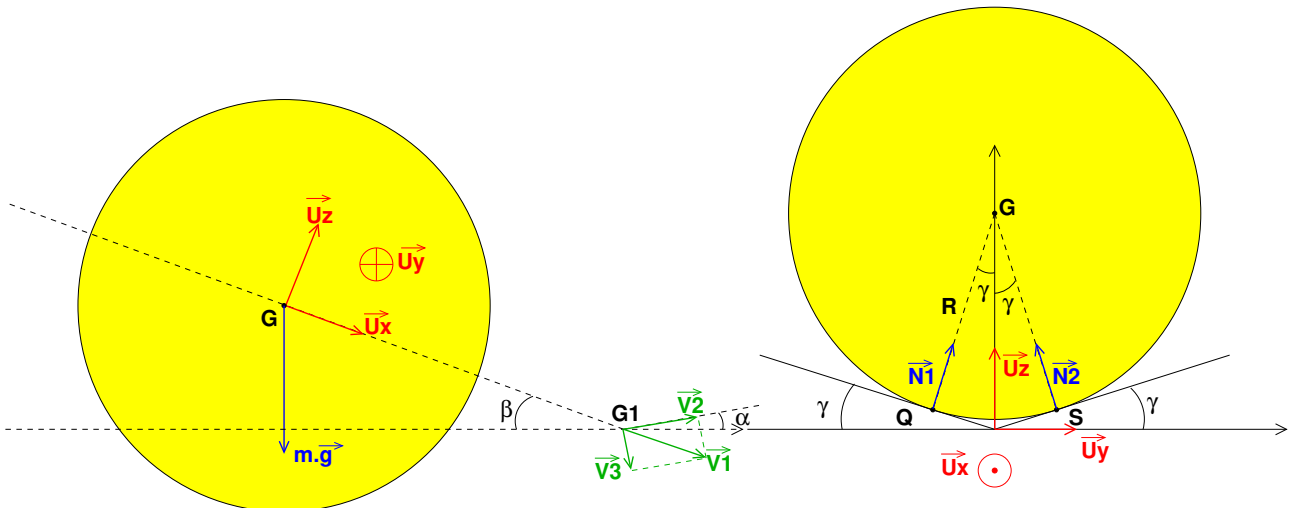
Mesure au « stimpmètre » de la « vitesse de green ».

Le stimpmètre (stimpmeter en anglo-saxon) est une règle en bois ou en aluminium. Large de 4,4cm, longue de 91 cm, la règle présente une cannelure en V (gouttière) avec un angle intérieur de 145° afin d'y faire rouler une balle. Une vis de hauteur ajustable permet de retenir la balle à la distance $L=76,2\text{cm}$ de l'extrémité inférieure tant que l'inclinaison de la règle est inférieure à 20° . Lorsque la règle est soulevée progressivement et lentement par son extrémité côté vis, l'autre extrémité reposant sur le green, la balle quitte l'encoche dès que l'inclinaison par rapport à l'horizontale dépasse 20° et roule alors sans glisser le long de la règle puis sur le green où elle parcourt une certaine distance. Pendant ce mouvement, l'utilisateur maintient l'angle d'inclinaison β par rapport à l'horizontale fixe et à peine supérieur à 20° . Nous poserons : $\beta = 20,5^\circ$. C'est à partir de cette distance parcourue par la balle sur le green qu'est déterminée la "vitesse de green" qui est en fait une distance caractérisant la rapidité du green. Plus cette distance est grande plus le green est rapide et plus au putting les balles iront loin et vite.



7 Vitesse d'arrivée de la balle sur le green.

On suppose que la balle, assimilée à une boule homogène de masse $m = 45,9\text{g}$, de rayon $R=21,3\text{mm}$. La figure ci-dessous représente la boule en train de rouler.



Le plan de la figure de gauche est le plan vertical contenant la trajectoire du centre G de la balle (plan G,x,z); le plan de la figure de droite est le plan (G,y,z) correspondant à une vue de face de la balle. La balle est soumise à trois forces :

* son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot g \cdot (\sin(\beta) \cdot \vec{U}_x - \cos(\beta) \cdot \vec{U}_z)$

* les réactions des deux surfaces planes de la gouttière en V, s'appliquant aux points de contacts Q et S. Chaque réaction peut se décomposer en une force tangentielle et une force normale :

$$\text{en Q : } \vec{N}_1 - T_1 \cdot \vec{U}_x; \text{ en S : } \vec{N}_2 - T_2 \cdot \vec{U}_x$$

Au cours du roulement sans glissement l'expression de l'énergie cinétique est donné par le théorème de König n° 3 :

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot V_G^2 + E_c^*$$

où E_c^* désigne l'énergie cinétique de la balle mesurée dans le repère barycentrique (G,x,y,z). Cette énergie cinétique barycentrique correspond à une rotation autour de l'axe (G,x) avec un vecteur rotation propre : $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{U}_y$.

$$E_c^* = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \Omega^2 = \frac{1}{5} m \cdot R^2 \cdot \Omega^2$$

La vitesse angulaire s'obtient en considérant l'absence de glissement par rapport à la gouttière en Q et en S :

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_G + \vec{Q}G \wedge \vec{\Omega} = V_G \cdot \vec{U}_x + \left(R \cdot \cos(\gamma) \cdot \vec{U}_z + R \cdot \sin(\gamma) \cdot \vec{U}_y \right) \wedge \Omega \cdot \vec{U}_y$$

La vitesse des points Q et S est nulle en absence de glissement :

$$\vec{0} = V_G \cdot \vec{U}_x - R \cdot \cos(\gamma) \cdot \Omega \cdot \vec{U}_x \quad \text{donc} \quad V_G = R \cdot \Omega \cdot \cos(\gamma)$$

D'où l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot V_G^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{5 \cdot \cos^2(\gamma)} \right] \quad (22)$$

Pour déterminer la vitesse V_1 de G lorsque la balle arrive en bas du stimpètre, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique à celle-ci entre l'instant où elle démarre sans vitesse initiale et l'instant où la balle arrive en bas, le centre G ayant parcourue la distance L.

En absence de glissement aux contacts Q et S, les forces exercées par les parois de la gouttière développe une puissance nulle à chaque instant ; elles ne travaillent pas. Le seul travail à considérer est celui du poids. D'où l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \cdot V_1^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{5 \cdot \cos^2(\gamma)} \right] &= W_{(\vec{P})} = m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\beta) \\ V_1 &= \sqrt{\frac{2g \cdot L \cdot \sin(\beta)}{1 + \frac{2}{5 \cdot \cos^2(\gamma)}}} \end{aligned} \quad (23)$$

Avec : $\gamma = 90 - \frac{145}{2} = 17,5^\circ$, on obtient :

$$V_1 = 1,91 m/s \quad (24)$$

8 Modification de vitesse à la sortie du stimpètre

Arrivée en bas du stimpètre (position G1 de G sur la figure ci-dessus) la balle prend contact avec le green modélisé précédemment : il est assimilé à un plan incliné d'un angle α dans le sens montant par rapport à l'horizontale. On suppose que la trajectoire de G sur le stimpètre et la ligne de plus grande pente du green appartiennent au même plan vertical. On suppose le gazon suffisamment souple pour annuler la composante de la quantité de mouvement perpendiculaire au green ($m \cdot \vec{V}_3$). En revanche, la composante $m \cdot \vec{V}_2$ de la quantité de mouvement est conservée. On peut donc considérer que la balle aborde le green en roulant sans glisser avec une vitesse de son centre égale à :

$$V_2 = V_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad (25)$$

9 Mesure de la « vitesse » du green

L'étude ultérieure est identique à celle déjà faite : la balle est soumise à son poids, une réaction du sol qui ne travaille pas puisqu'il n'y a pas de glissement et une force de frottement supplémentaire exercée par l'herbe qui se déforme au passage de la balle. En notant d_{min} la distance parcourue par la balle sur le green avant de s'immobiliser, le théorème de l'énergie cinétique conduit à :

$$\frac{7}{10} m \cdot V_2^2 = m \cdot g \cdot d_{min} \cdot [k + \sin(\alpha)] \quad (26)$$

$$d_{min} = \frac{7V_1^2 \cdot \cos^2(\alpha + \beta)}{10g \cdot [k + \sin(\alpha)]} \quad (27)$$

On refait alors l'expérience sur la même ligne de plus grande pente mais dans le sens descendant du green. Le travail du poids devient alors moteur et la rupture de pente à l'arrivée de la balle sur le green est : $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \beta - \alpha$. On obtient l'expression de la nouvelle distance parcourue avant l'arrêt en adaptant (26) :

$$d_{max} = \frac{7V_1^2 \cdot \cos^2(\beta - \alpha)}{10g \cdot [k - \sin(\alpha)]} \quad (28)$$

La « vitesse du green » est appréciée par la valeur de , distance d'arrêt que l'on obtiendrait si le green était parfaitement horizontal. On l'obtient en posant dans (26) : $\alpha = 0^\circ$.

$$d_h = \frac{7V_1^2 \cdot \cos^2(\beta)}{10 \cdot g \cdot k} \quad (29)$$

Existe-t-il une relation simple entre ces trois distances? La réponse est non dans le cas général. Cependant, les ordres de grandeur des angles permettent une simplification. Comme déjà écrit : $\beta = 20,5^\circ$ alors que l'angle α est de quelques degrés au plus. Dans ces conditions, il est possible de poser :

$$\cos^2(\beta) \approx \cos^2(\beta - \alpha) \approx \cos^2(\alpha + \beta)$$

ce qui conduit, en tenant compte de (26), (27) et (28), à :

$$[k + \sin(\alpha)] \cdot d_{min} \approx k \cdot d_h \approx [k - \sin(\alpha)] \cdot d_{max}$$

$$\sin(\alpha) \approx \frac{k(d_h - d_{min})}{d_{min}} \approx \frac{k(d_{max} - d_h)}{d_{max}}$$

Soit :

$$d_{max} \cdot (d_h - d_{min}) \approx d_{min} \cdot (d_{max} - d_h)$$

$$d_h = \frac{2 \cdot d_{max} \cdot d_{min}}{d_{max} + d_{min}} \quad (30)$$

De nombreuses expériences réalisées sur des green expérimentaux d'inclinaison réglable sont en accord avec la « formule » (30) pour peu que la pente du green soit faible. **Cela valide l'hypothèse d'une force de frottement constante exercée par le gazon sur la balle.** La valeur de d_h varie énormément d'un green à l'autre et énormément en fonction des conditions climatiques. Pour les applications numériques, je retiens la valeur moyenne : $d_h = 2,0m$ sachant que, pour certains green particulièrement bien entretenus et par beau temps, cette valeur peut dépasser 3m. Il est alors possible d'en déduire la valeur moyenne de k à partir de (28) :

$$k = \frac{7V_1^2 \cdot \cos^2(\beta)}{10 \cdot g \cdot d_h} \quad (31)$$

L'application numérique conduit à :

$$k = 0,11 \quad (32)$$

Remarque : la balle de golf a toujours été assimilée à une boule homogène. C'est une excellente approximation pour les balles « deux couches ». Par exemple, la balle NXT de Titleist est constituée d'une boule homogène entourée d'une couche d'un matériau différent mais d'épaisseur égale seulement à 2mm soit moins du dixième du rayon de la balle...

La situation est un peu plus compliquée pour les balles plus sophistiquées. Il faudrait avoir les données constructeur pour écrire le moment d'inertie de la balle par rapport à un de ses diamètres sous la forme $J = K \cdot m \cdot R^2$ où K serait une constante légèrement différente de $\frac{2}{5}$...

retour à la page principale