

Roulement d'un yo-yo sur une table horizontale

Présentation du problème

Un considère un yo-yo assimilé à un petit cylindre de masse m_1 de rayon r et d'axe de symétrie (Gz) collé à deux grands cylindres identiques de même axe de symétrie ayant chacun la masse m_2 et le rayon R . On choisit comme système (S) l'ensemble constitué du yo-yo et du fil enroulé sur la partie centrale. Une difficulté apparaît alors : (S) ne garde pas une masse fixe puisque le fil s'enroule ou se déroule. On se limite donc à l'étude du démarrage sans vitesse initiale de (S) sur une table horizontale, la masse de (S) étant alors M et la distance GQ égale à r . On se limite, au moins dans les premiers paragraphes, à un roulement sans glissement lorsque l'on tire sur la ficelle. Dans quel sens roule le yo-yo ? L'expérience, facile à réaliser (on peut remplacer le yo-yo par une simple bobine de fil à coudre) conduit à des résultats a priori un peu surprenant. Si l'angle θ d'inclinaison du fil par rapport à l'horizontale est faible et la force de traction \vec{F} du fil pas trop intense, le yo-yo se déplace dans le sens de la force de traction (vers la droite du schéma). En revanche, si on augmente l'inclinaison du fil : le sens du mouvement s'inverse ! Enfin : si le manipulateur tire « fort » sur le fil, un phénomène de glissement apparaît. Il s'agit ici de réaliser une modélisation de la situation suffisamment réaliste pour rendre compte de ces phénomènes.

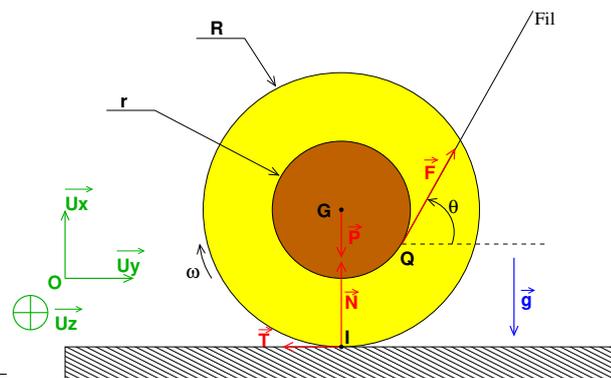


FIGURE 1 –

Condition de roulement sans glissement

Le vecteur rotation instantané du solide (S) mesuré dans le repère barycentrique (G, x, y, z) est : $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{U}_z$. La vitesse du point G dans le repère terrestre (O, x, y, z) est : $\vec{V}_G = v \cdot \vec{U}_y$. Si le solide ne glisse pas par rapport à la table, la vitesse du point I, considéré comme appartenant au yo-yo, doit être le vecteur nul. Or l'expression générale de ce vecteur vitesse est :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_G + \vec{IG} \wedge \vec{\Omega} \quad (1)$$

$$\vec{0} = v \cdot \vec{U}_y + R \cdot \vec{U}_x \wedge (\omega \cdot \vec{U}_z) = (v - R \cdot \omega) \cdot \vec{U}_y \quad (2)$$

D'où la condition de roulement sans glissement :

$$\boxed{v = R \cdot \omega} \quad (3)$$

Nous nous limitons au mouvement au cours duquel le centre G reste animé d'un mouvement rectiligne. Son accélération dans le repère (O, x, y, z) peut s'écrire : $\vec{a} = a \cdot \vec{U}_y$ avec :

$$a = \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (4)$$

Étude dynamique

Les forces appliquées au solide (S) sont représentées sur le schéma :

- * le poids $\vec{P} = M \cdot \vec{g}$
- * la force de traction du fil \vec{F}
- * la réaction de la table qui peut être considérée comme la somme d'une réaction normale \vec{N} et d'une réaction tangentielle \vec{T} .

Le repère (O, x, y, z) étant assimilé à un repère galiléen, le théorème du centre d'inertie (relation fondamentale de la dynamique) conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F} = M \cdot \vec{a} \quad (5)$$

La projection sur l'axe (O, y) conduit à :

$$F \cdot \cos(\theta) - T = M \cdot a \quad (6)$$

Remarque : F , T désignent les normes des vecteurs forces. « a » est en revanche une valeur algébrique pour l'instant de signe inconnu.

Le théorème de König sur moment dynamique en G (ou sur le moment cinétique en G) montre que le moment dynamique (ou le moment cinétique) du solide au point G est le même dans le repère terrestre galiléen (O,x,y,z) et dans le repère barycentrique (G,x,y,z). Il est donc possible d'appliquer le théorème du moment dynamique en G dans le repère barycentrique, bien que celui-ci ne soit pas galiléen. On obtient :

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{U}_z = \vec{GI} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) + \vec{GQ} \wedge \vec{F}$$

Soit :

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot T - r \cdot F \quad (7)$$

En divisant tous les termes par R et en tenant compte de la relation (4) :

$$\frac{J}{R^2} \cdot a = T - \frac{r}{R} \cdot F \quad (8)$$

En additionnant « membre à membre » cette relation (8) et la relation (6), on obtient l'expression de l'accélération :

$$a = F \cdot \frac{\cos(\theta) - \frac{r}{R}}{M + \frac{J}{R^2}} \quad (9)$$

F et $(M + \frac{J}{R^2})$ étant deux grandeurs strictement positives, le signe de l'accélération ne dépend que de celui de $(\cos(\theta) - \frac{r}{R})$. Nous sommes donc amenés à distinguer trois cas, toujours en excluant provisoirement le glissement. Remarquons d'abord que les valeurs de θ étant comprises entre zéro et 90°, la fonction cosinus est monotone décroissante sur cet intervalle.

Premier cas : $\cos(\theta) > \frac{r}{R}$ soit : $\theta < \theta_0 = \arccos(\frac{r}{R})$. La relation (9) conduit à : $a > 0$: le yo-yo se met à rouler dans le sens positif, le fil s'enroule sur la partie centrale du yo-yo.

Deuxième cas : $\cos(\theta) < \frac{r}{R}$ soit : $\theta > \theta_0 = \arccos(\frac{r}{R})$. La relation (9) conduit à : $a < 0$: le yo-yo se met à rouler dans le sens négatif, le fil se déroule sur la partie centrale du yo-yo.

Troisième cas : $\cos(\theta) = \frac{r}{R}$ soit : $\theta = \theta_0 = \arccos(\frac{r}{R})$. La relation (9) conduit à : $a = 0$: le yo-yo reste en équilibre, sous réserve bien sûr que l'intensité de la force de traction ne soit pas trop intense mais cela sera précisé au paragraphe suivant. On peut remarquer que ce cas particulier correspond à la situation où le prolongement du fil tendu passe par le point I : les quatre forces à l'équilibre sont coplanaires et concourantes.

Autre condition de roulement sans glissement

La loi de Coulomb sur les frottements entre solides précise que le roulement sans glissement n'est possible que si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$T \leq \mu_s \cdot N \quad (10)$$

où μ_s désigne le coefficient de frottement statique, grandeur caractéristique de la nature des deux solides et de leurs états de surfaces (rugosité plus ou moins grande...). Pour un contact bois sur bois, μ_s est compris entre 0,25 et 0,45 selon les natures des bois et les états des surfaces.

La projection de la relation (5) sur l'axe vertical conduit à :

$$N = M \cdot g - F \cdot \sin(\theta) \quad (11)$$

Or, selon (6) :

$$T = F \cdot \cos(\theta) - M \cdot a \quad (12)$$

En tenant compte de ces trois dernières relations on obtient :

$$F \cdot \cos(\theta) - M \cdot a \leq \mu_s \cdot [M \cdot g - F \cdot \sin(\theta)]$$

$$F \cdot \cos(\theta) - M \cdot F \cdot \frac{\cos(\theta) - \frac{r}{R}}{M + \frac{J}{R^2}} \leq \mu_s \cdot [M \cdot g - F \cdot \sin(\theta)]$$

Soit :

$$F \leq \frac{\mu_s \cdot M \cdot g}{\cos(\theta) + \mu_s \cdot \sin(\theta) - \frac{M}{M + \frac{J}{R^2}} \cdot (\cos(\theta) - \frac{r}{R})} \quad (13)$$

Ainsi, le roulement sans glissement étudié précédemment n'est possible que si la force de traction reste inférieure à la valeur obtenue ci-dessus. Sinon, le yo-yo se met à glisser sur la table. À titre d'exemple, je détaille ci-dessous le cas particulier $\theta = \theta_0 = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$ en étudiant les différents démarrages possibles du yo-yo selon l'intensité de la force de traction.

Étude du cas particulier $\theta = \theta_0 = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$.

Alors : $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$. L'équilibre du yo-yo sur la table est donc maintenu tant que :

$$F \leq \frac{\mu_s \cdot M \cdot g \cdot R}{r + \mu_s \cdot \sqrt{R^2 - r^2}} \quad (14)$$

Supposons maintenant que F devienne plus élevée que la valeur indiquée ci-dessus. Les relations (5), (6) et (7) restent valides mais la relation (8) et les suivantes sont maintenant fausses. En revanche, la loi de Coulomb sur les frottements entre deux solides glissant l'un par rapport à l'autre s'écrit :

$$T = \mu_d \cdot N \quad (15)$$

où μ_d désigne le coefficient de frottement dynamique entre les deux solides. La valeur de μ_d est de très peu inférieure à la valeur de μ_s au point que souvent, pour simplifier les calculs, on pose $\mu_d = \mu_s$. La loi de Coulomb précise aussi que le sens de la force de frottement \vec{T} est opposé au sens de la vitesse de glissement du yo-yo par rapport à la table. Le vecteur \vec{T} a donc le sens indiqué sur le schéma seulement si le vecteur \vec{V}_I a le sens du vecteur \vec{U}_y , ce qui suppose, selon (2) :

$$V > R \cdot \omega \quad (16)$$

Les forces étant indépendantes du temps, les relations (6) et (8) permettent de considérer l'accélération et l'accélération angulaire comme deux constantes ; ainsi :

$$V = a \cdot t \quad ; \quad \omega = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) \cdot t$$

L'inégalité (16) conduit donc à :

$$a > R \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (17)$$

Reprenons les équations obtenues précédemment en tenant compte de la valeur particulière de l'inclinaison choisie ici : (6) conduit à :

$$M \cdot a = F \cdot \frac{r}{R} - T$$

(7) conduit à :

$$\frac{J}{R} \cdot \frac{d\omega}{dt} = T - F \cdot \frac{r}{R}$$

(11) et (15) conduisent à :

$$T = \mu_d \cdot N = \mu_d \cdot \left[M \cdot g - F \cdot \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right]$$

On obtient à partir de ces trois relations :

$$\boxed{M \cdot a = -\frac{J}{R} \cdot \frac{d\omega}{dt} = F \cdot \left[\frac{r + \mu_d \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right] - \mu_d \cdot M \cdot g} \quad (18)$$

Or, la relation (14) sur l'existence d'un glissement conduit à :

$$F \cdot \left[\frac{r + \mu_s \cdot \sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right] > \mu_s \cdot M \cdot g \quad (19)$$

Les coefficients de frottements statique et dynamique étant très sensiblement de même valeur, l'égalité (18) et l'inégalité (19) conduisent à :

$$\boxed{M \cdot a = -\frac{J}{R} \cdot \frac{d\omega}{dt} > 0} \quad (20)$$

Conséquences : le centre G du yo-yo se déplace vers la droite alors que celui-ci tourne dans le sens négatif (sens anti horaire). La relation (4) de roulement sans glissement n'est évidemment pas vérifiée : **il y a simultanément glissement et roulement**. Dernière remarque : l'inégalité (17) est bien vérifiée : le vecteur \vec{T} a bien le sens précisé sur le schéma.

retour à la page principale