ÉLECTROMAGNÉTISME

Influences des symétries et des invariances de la source sur les propriétés des champs électrostatique, gravitationnel et magnétostatique.

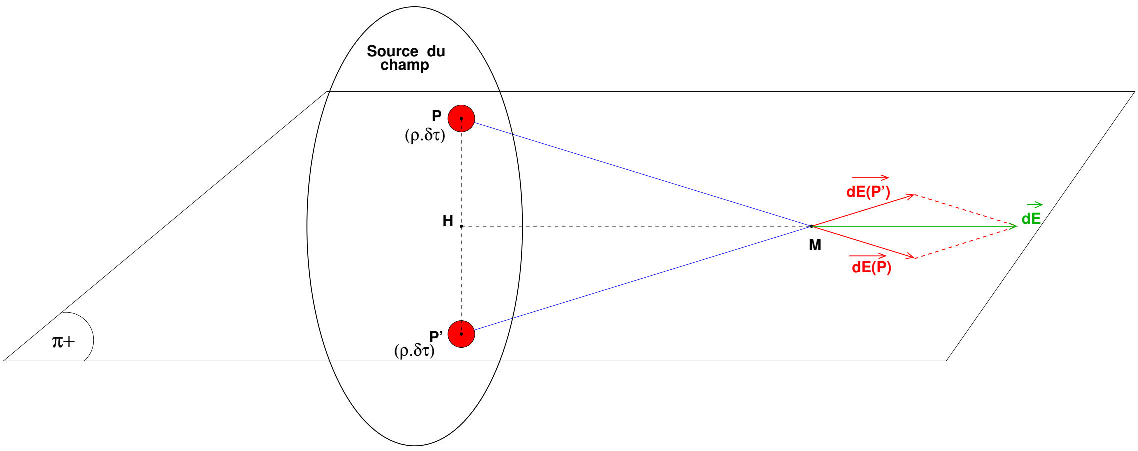
I. Influence d'un plan de symétrie de la source sur la direction du vecteur champ électrostatique ou gravitationnel.

Important : seuls les plans de symétrie de la source contenant le point M où on cherche à déterminer le vecteur champ présentent un intérêt.

Commençons par étudier le cas d'une source de champ électrique. Nous généraliserons ensuite à la source de champ gravitationnel.

Définition : (Π^+) est un plan de symétrie de la source si, à tout point P de la distribution de charge électrique où la densité volumique de charge est ρ_P, on peut faire correspondre un symétrique P' par rapport à (Π^+) où la densité de charge est :

$$\boxed{\rho_{P'}=\rho_P}$$



On note dτ un volume élémentaire entourant P ou P'. La charge $\rho_P \cdot d\tau = \rho \cdot d\tau$ centrée en P crée en M un champs de vecteur :

$$\overrightarrow{dE(P)} = \frac{\rho \cdot d\tau}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

La charge $\rho_{P'} \cdot d\tau = \rho \cdot d\tau$ centrée en P' crée en M un champs de vecteur :

$$\overrightarrow{dE(P')} = \frac{\rho \cdot d\tau}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{P'M}}{P'M^3}$$

P et P' sont symétriques par rapport à (Π^+) : les distances PM et P'M sont égales. La somme des deux vecteurs champ élémentaires s'écrit :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE(P)} + \overrightarrow{dE(P')} = \frac{\rho \cdot d\tau}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M}}{PM^3}$$

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{P'H} + \overrightarrow{HM} = 2 \cdot \overrightarrow{HM} \text{ puisque } : \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{P'H} = \overrightarrow{0} \text{ pour raison de symétrie}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\rho \cdot d\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{HM}}{PM^3}$$

Ce vecteur champ élémentaire appartient à (Π^+) ; le raisonnement peut se généraliser à tout couple de points (P,P') de la source. Le vecteur champ créé par la source entière appartient ainsi au plan (Π^+).

Remarque : Ce résultat peut se généraliser à tout vecteur champ radial, c'est à dire à tout vecteur champ tel que le vecteur champ élémentaire soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{PM}$. Ce résultat est en particulier valide pour le vecteur champ gravitationnel $\overrightarrow{G_g}$ puisque la loi de Newton, conduit à l'expression ci-dessous du vecteur champ élémentaire en M :

$$\overrightarrow{dG_g} = -G \cdot \rho \cdot d\tau \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

(ρ : masse volumique en P, G : constante universelle de la gravitation)

Conclusion : si la source présente un plan de symétrie passant par un point M, le vecteur champ électrostatique ou le vecteur champ de gravitation en M appartient à ce plan de symétrie.

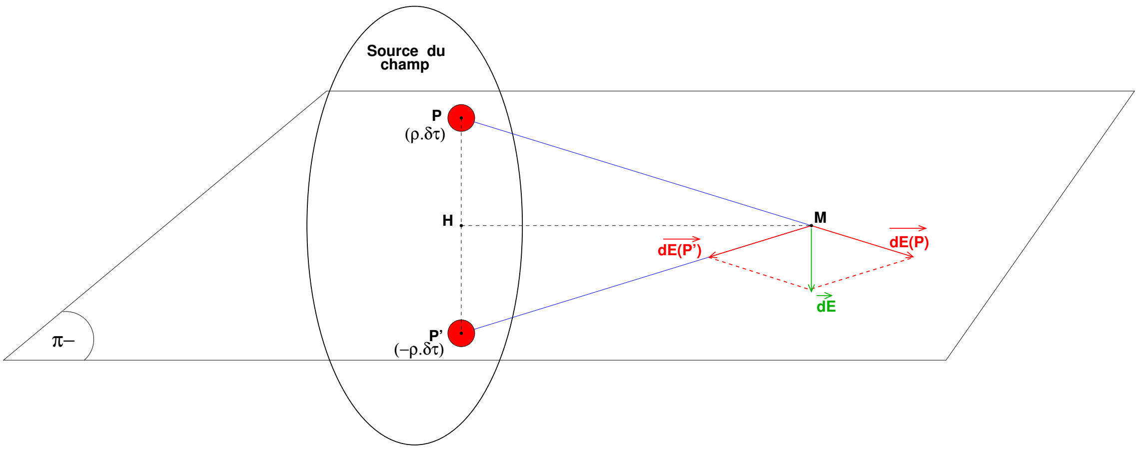
II. Influence d'un plan d'antisymétrie de la source sur la direction du vecteur champ électrostatique.

Important : seuls les plans d'antisymétrie de la source contenant le point M où on cherche à déterminer le vecteur champ présentent un intérêt.

Définition : (Π^-) est un plan d'antisymétrie de la source si, à tout point P de la distribution de charge électrique où la densité volumique de charge est ρ_P , on peut faire correspondre un symétrique P' par rapport à (Π^-) où la densité de charge est :

$$\boxed{\rho_{P'}\text{=-}\rho_P}$$

Remarque : cette notion de plan d'antisymétrie n'a bien sûr pas de sens pour une source de champ gravitationnel : une masse ne peut être négative.



La charge $\rho_P \cdot d\tau = \rho \cdot d\tau$ centrée en P crée en M un champs de vecteur :

$$\overrightarrow{dE(P)} = \frac{\rho \cdot d\tau}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

La charge $\rho_{P'} \cdot d\tau = -\rho \cdot d\tau$ centrée en P' crée en M un champs de vecteur :

$$\overrightarrow{dE(P')} = \frac{-\rho \cdot d\tau}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{P'M}}{P'M^3}$$

P et P' sont symétriques par rapport à (Π^-) : les distances PM et P'M sont égales. La somme des deux vecteurs champ élémentaires s'écrit :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE(P)} + \overrightarrow{dE(P')} = \frac{\rho \cdot d\tau}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{P'M}}{PM^3}$$

$$\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{P'H} - \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{PP'}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{\rho \cdot d\tau}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{PP'}}{PM^3}$$

Ce vecteur champ élémentaire est orthogonal à (Π^-) ; le raisonnement peut se généraliser à tout couple de points (P,P') de la source. Le vecteur champ créé par la source entière est ainsi orthogonal au plan (Π^-).

Conclusion : si la source présente un plan d'antisymétrie passant par un point M, le vecteur champ électrostatique en M est orthogonal à ce plan d'antisymétrie.

III. Influence d'un plan de symétrie de la source sur la direction du vecteur champ magnétostatique.

Remarques : en absence de confusion possible dans cette étude avec le vecteur $\overrightarrow{H}$, le vecteur champ d'induction magnétique $\overrightarrow{B}$ sera appelé simplement vecteur champ magnétique ou vecteur champ magnétostatique puisque nous nous limitons aux états indépendants du temps.

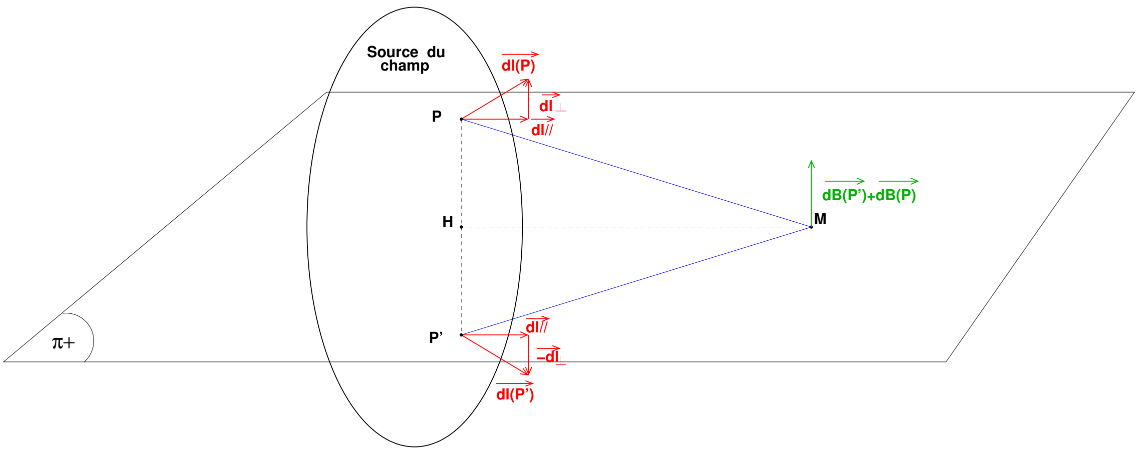
La loi de Biot et Savart fait intervenir un produit vectoriel $I \cdot \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}$ dans l'expression du vecteur champ élémentaire créé par un élément de courant $I \cdot \overrightarrow{dl}$ centré en P. Ce vecteur est ainsi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{PM}$. Le vecteur champ est pour cela qualifié d'orthoradial plutôt que de radial. Nous allons montrer que la différence entre champ radial et champ orthoradial conduit à inverser les influences des plans $[\Pi^-]$ et (Π^+) sur les directions des vecteurs champs.

Important : seuls les plans de symétrie de la source contenant le point M où on cherche à déterminer le vecteur champ présentent un intérêt.

Définition : (Π^+) est un plan de symétrie de la source si, à tout point P de la distribution de courants filiformes caractérisé par le vecteur $I \cdot \overrightarrow{dl_P}$, on peut faire correspondre un symétrique P' par rapport à (Π^+) tel que :

$$\boxed{\text{I}\cdot\overrightarrow{dl_{P'}} \text{ : vecteur symétrique par rapport à } (\Pi^+) \text{de I}\cdot\overrightarrow{dl_P}}$$

Remarque : dans le cas d'une distribution volumique de courant, il convient de remplacer le vecteur $I \cdot \overrightarrow{dl_P}$ par le vecteur $\overrightarrow{j_{(P)}} \cdot d\tau$; dans le cas d'une distribution surfacique de courant, le vecteur $I \cdot \overrightarrow{dl_P}$ doit être remplacer par le vecteur $\overrightarrow{i_s} \cdot dS$; $\overrightarrow{j_{(P)}}$ désigne le vecteur densité de courant volumique de courant au point P entouré d'un volume élémentaire $d\tau$; $\overrightarrow{i_s}$ désigne le vecteur densité surfacique de courant au point P entouré de la surface élémentaire dS.



Ainsi, les composantes de $\overrightarrow{dl}$ parallèles à (Π^+) en P et en P' sont égales et notées $\overrightarrow{dl_\parallel}$; les composantes de $\overrightarrow{dl}$ orthogonales à (Π^+) en P et en P' sont opposées et notées $\overrightarrow{dl_\perp}$ et $-\overrightarrow{dl_\perp}$. Appliquons la loi de Biot et Savart. Le vecteur champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant $I \cdot \overrightarrow{dl}$ centré en P a pour expression :

$$\overrightarrow{dB(P)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\parallel} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} + \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\perp} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Le vecteur champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant centré en P' a pour expression :

$$\overrightarrow{dB(P')} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\parallel} \wedge \overrightarrow{P'M}}{P'M^3} - \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\perp} \wedge \overrightarrow{P'M}}{P'M^3}$$

Comme déjà démontré :

$$P'M^3 = PM^3 \qquad \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{P'M} = 2 \cdot \overrightarrow{HM} \qquad \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{PP'}$$

D'où :

$$\overrightarrow{dB} = \overrightarrow{dB(P)} + \overrightarrow{dB(P')} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\parallel} \wedge \overrightarrow{HM}}{PM^3} + \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\perp} \wedge \overrightarrow{PP'}}{PM^3}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{dl_\perp}$ et $\overrightarrow{PP'}$ sont colinéaires; leur produit vectoriel est le vecteur nul. Les vecteurs $\overrightarrow{dl_\parallel}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont tous deux de directions parallèles à (Π^+) : leur produit vectoriel est donc un vecteur orthogonal à (Π^+). Le vecteur $\overrightarrow{dB}$ est ainsi orthogonal à (Π^+). Le résultat peut se généraliser à tout couple de points (P,P').

Conclusion : si une source de champ magnétique présente un plan de symétrie (Π^+) ***contenant le point M où on cherche à déterminer le vecteur champ magnétique, ce vecteur champ est orthogonal à*** (Π^+) **.**

IV. Influence d'un plan d'antisymétrie de la source sur la direction du vecteur champ magnétostatique.

Important : seuls les plans de symétrie de la source contenant le point M où on cherche à déterminer le vecteur champ présentent un intérêt.

Définition : (Π^-) est un plan d'antisymétrie de la source si, à tout point P de la distribution de courants filiformes caractérisé par le vecteur $I \cdot \overrightarrow{dl_P}$, on peut faire correspondre un symétrique P' par rapport à (Π^-) tel que :

$$\boxed{\text{I}\cdot\overrightarrow{dl_{P'}} \text{ : vecteur symétrique par rapport à } (\Pi^-) \text{de -I}\cdot\overrightarrow{dl_P}}$$

Il suffit, par rapport à l'étude précédente de remplacer $I \cdot \overrightarrow{dl_{P'}}$ par son opposé.

$$\overrightarrow{dB(P)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\parallel} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} + \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\perp} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$\overrightarrow{dB(P')} = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\parallel} \wedge \overrightarrow{P'M}}{P'M^3} + \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\perp} \wedge \overrightarrow{P'M}}{P'M^3}$$

$$\overrightarrow{dB} = \overrightarrow{dB(P)} + \overrightarrow{dB(P')} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\parallel} \wedge \overrightarrow{PP'}}{PM^3} + \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_\perp} \wedge \overrightarrow{HM}}{PM^3}$$

Propriétés des produits vectoriels : le vecteur $\overrightarrow{dl_\parallel} \wedge \overrightarrow{PP'}$est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{PP'}$, il appartient donc au plan (Π^-); de même, le vecteur $\overrightarrow{dl_\perp} \wedge \overrightarrow{P'M}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{dl_\perp}$: il appartient donc lui aussi au plan (Π^-). Le vecteur $\overrightarrow{dB}$ est ainsi la somme de deux vecteurs appartenant au plan (Π^-). Il appartient donc à ce plan (Π^-). Ce résultat peut se généraliser à tout couple de points (P,P') de la source.

Conclusion : si la source présente un plan d'antisymétrie passant par un point M, le vecteur champ magnétostatique en M appartient à ce plan.

V. Influence d'un plan de symétrie de la source sur la direction du potentiel vecteur magnétostatique

Pour plus de clarté, je recopie les éléments du paragraphe III utile ici :

Important : seuls les plans de symétrie de la source contenant le point M où on cherche à déterminer le vecteur champ présentent un intérêt.

Définition : (Π^+) est un plan de symétrie de la source si, à tout point P de la distribution de courants filiformes caractérisé par le vecteur $I \cdot \overrightarrow{dl_P}$, on peut faire correspondre un symétrique P' par rapport à (Π^+) tel que :

$$\boxed{\text{I}\cdot\overrightarrow{dl_{P'}} \text{ : vecteur symétrique par rapport à } (\Pi^+) \text{de I}\cdot\overrightarrow{dl_P}}$$

Remarque : dans le cas d'une distribution volumique de courant, il convient de remplacer le vecteur $I \cdot \overrightarrow{dl_P}$ par le vecteur $\overrightarrow{j_{(P)}} \cdot d\tau$; dans le cas d'une distribution surfacique de courant, le vecteur $I \cdot \overrightarrow{dl_P}$ doit être remplacer par le vecteur $\overrightarrow{i_s} \cdot dS$; $\overrightarrow{j_{(P)}}$désigne le vecteur densité de courant volumique de courant au point P entouré d'un volume élémentaire $d\tau$; $\overrightarrow{i_s}$désigne le vecteur densité surfacique de courant au point P entouré de la surface élémentaire dS.

Le potentiel vecteur élémentaire créé en M par l'élément de courant centré en P a pour expression :

$$\overrightarrow{dA(P)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_P}}{PM}$$

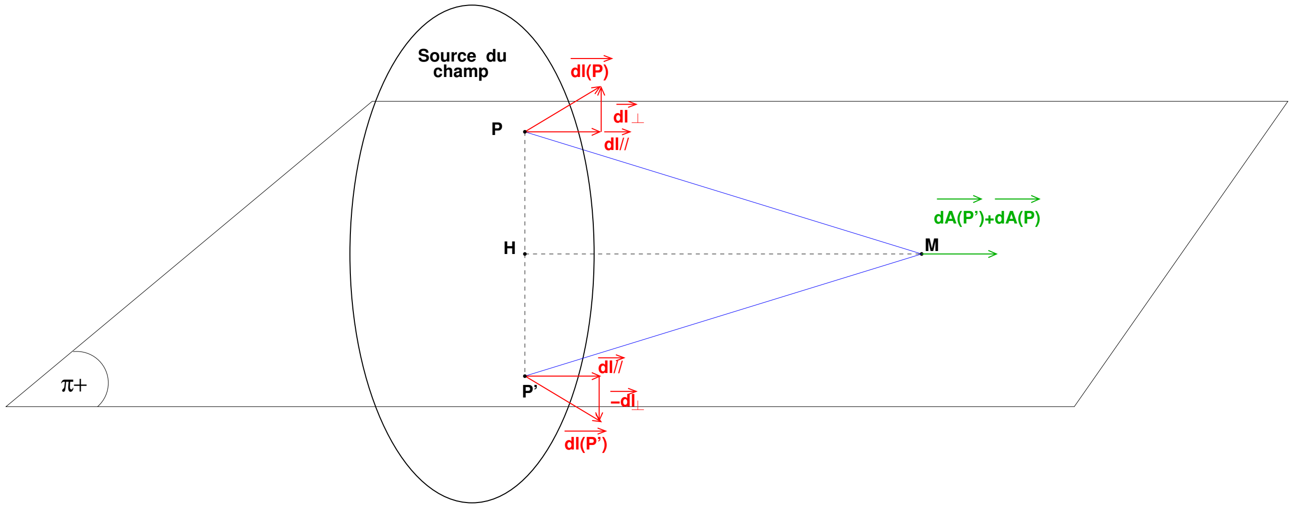
Le potentiel vecteur élémentaire créé en M par l'élément de courant centré en P' a pour expression :

$$\overrightarrow{dA(P')} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overrightarrow{dl_{P'}}}{P'M}$$

Puisque : $PM = P'M$: la somme de ces deux vecteurs élémentaires a pour expression :

$$\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{dA(P)} + \overrightarrow{dA(P')} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot PM} \cdot \left(\overrightarrow{dl_P} + \overrightarrow{dl_{P'}}\right)$$

Je reprends la figure faite à propos du vecteur champ $\overrightarrow{B}$ en l'adaptant :



On voit bien que les composantes des vecteurs $\overrightarrow{dl_P}$ et $\overrightarrow{dl_{P'}}$ perpendiculaires au plan (Π^+) sont opposées alors que les composantes dans le plan (Π^+) s'ajoutent. Le vecteur $\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{dA(P)} + \overrightarrow{dA(P')}$ en M appartient donc au plan (Π^+). Ce raisonnement peut se généraliser à tout couple de points {P,P'}de la source du champ magnétique.

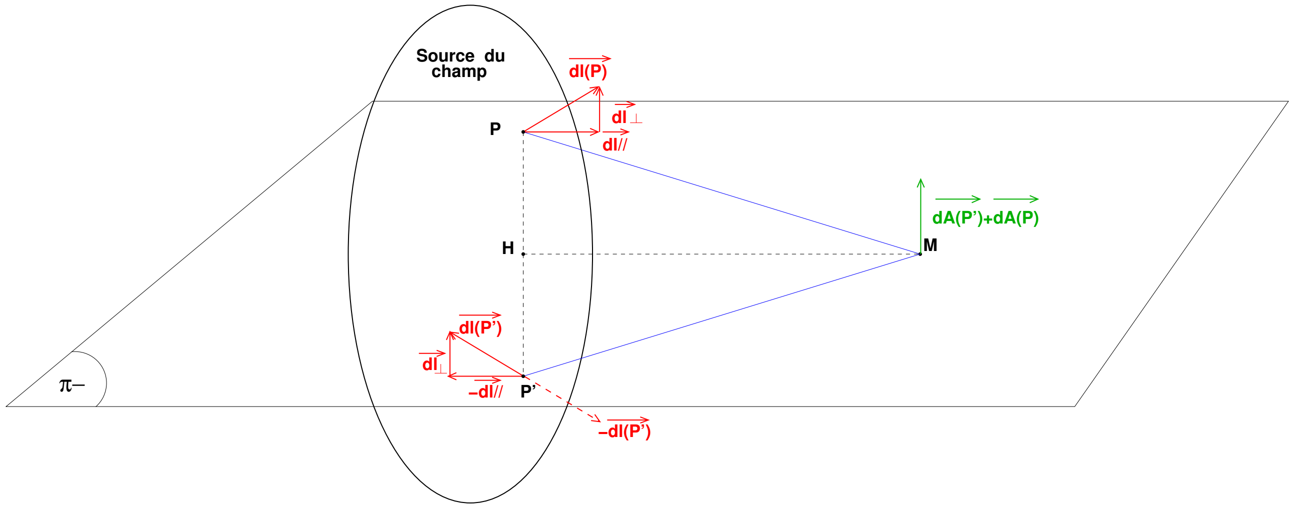
Conclusion : si une source de champ magnétique présente un plan de symétrie (Π^+) ***contenant le point M où on cherche à déterminer le potentiel vecteur , ce vecteur*** $\overrightarrow{A}$ ***appartient au plan*** (Π^+) ***.***

VI. Influence d'un plan d'antisymétrie de la source sur la direction du potentiel vecteur magnétostatique.

Nous avons maintenant :

$$\boxed{\text{I}\cdot\overrightarrow{dl_{P'}} \text{ : vecteur symétrique par rapport à } (\Pi^+) \text{de I}\cdot\overrightarrow{dl_P}}$$

Il suffit de reprendre le raisonnement précédent en remplaçant le vecteur $\overrightarrow{dl_{P'}}$ par son opposé.



On voit bien que les composantes des vecteurs $\overrightarrow{dl_P}$ et $\overrightarrow{dl_{P'}}$ perpendiculaire au plan (Π^-) s'ajoutent alors que les composantes dans le plan (Π^-) s'annulent. Le vecteur $\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{dA(P)} + \overrightarrow{dA(P')}$ en M est donc perpendiculaire au plan (Π^-). Ce raisonnement peut se généraliser à tout couple de points {P,P'}de la source du champ magnétique.

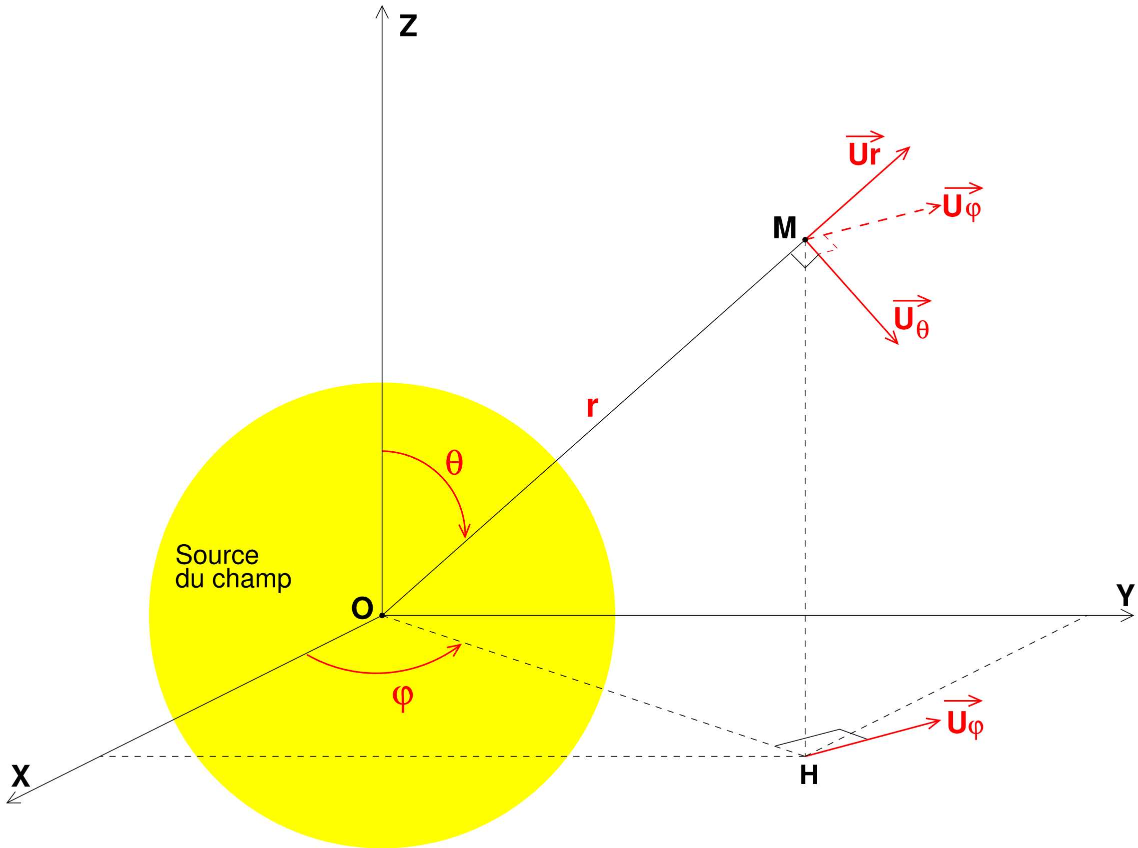
Conclusion : si une source de champ magnétique présente un plan d'antisymétrie (Π^-) ***contenant le point M où on cherche à déterminer le potentiel vecteur , ce vecteur*** $\overrightarrow{A}$ ***est orthogonal à*** (Π^-) ***.***

VII. Influence des invariances de la source sur les grandeurs physiques caractérisant le champ.

Cette partie concerne tous les champs et s'applique à toutes les grandeurs caractérisant ce champ : les composantes des vecteurs champ $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{G_g}$, $\overrightarrow{B}$, les potentiels scalaires (souvent notés V), les composantes des potentiels vecteurs (vecteur $\overrightarrow{A}$ par exemple pour les champs magnétiques).

VII.1. Influence de l'invariance de la source par rotation autour d'un point fixe O.

Ce cas est fréquent en astronomie et un électrostatique. La source peut être un astre dont la répartition de masse admet un centre de symétrie O (le centre de l'astre) ; il peut s'agit aussi d'une distribution de charges électriques à symétrie sphérique de centre O. Les coordonnées les plus adaptées sont les coordonnées sphériques.

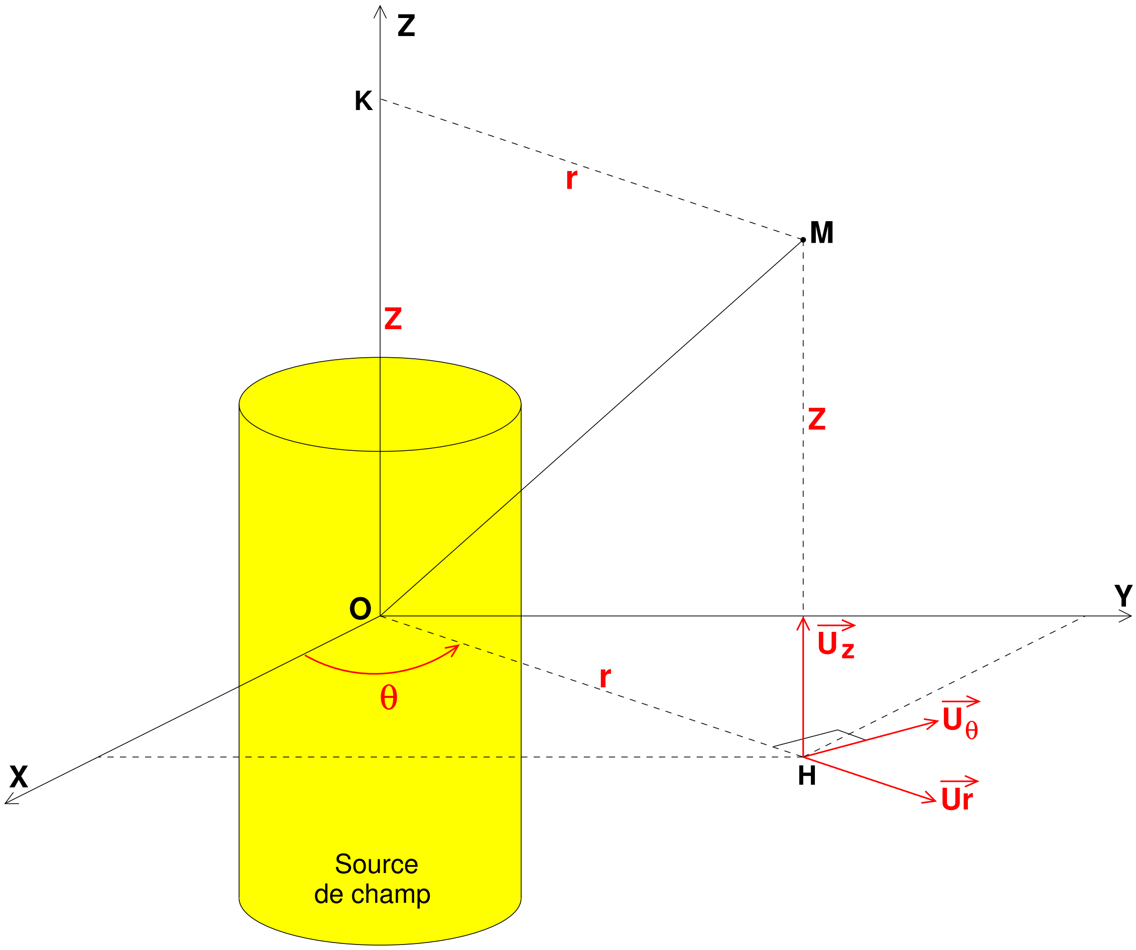


La source est invariante par rotation quelconque autour de son centre O. Les propriétés du champ en un point M quelconque sont donc invariantes par rotation de la source autour du point O. Imaginer que la source tourne autour du point O alors que M est fixe dans le repère d'étude est équivalent à considérer que la source est fixe dans le repère d'étude, le point M se déplaçant sur la sphère de centre O et de rayon r. Les grandeurs caractéristiques du champ étant invariantes lors de ce mouvement, on peut affirmer que ces grandeurs sont indépendantes des variables de position ϑ et φ.

Conclusion : lorsque une source de champ est invariante par rotation autour de son centre O, les caractéristiques de ce champ ne peuvent dépendre que de la variable de position r.

VII.2. Influence de l'invariance de la source par rotation autour d'un axe fixe (Oz).

Ce cas est fréquent en électrostatique et en magnétostatique. La source peut être un cylindre d'axe (Oz) uniformément chargé en volume ou uniformément chargé en surface ou un fil conducteur parcouru par un courant (dans ce cas, on ne s'intéresse pas au champ créé par le reste du circuit électrique). Les coordonnées les plus adaptées sont les coordonnées cylindro-polaires .



Une rotation de la source sur elle-même autour de son axe de symétrie (Oz) ne modifie pas les propriétés du champ au point M. En terme de mouvements relatifs, cette rotation est équivalente à M tournant autour de (Oz) sur un cercle de rayon r et de centre K. Les caractéristiques du champ en M sont indépendantes de la variable ϑ.

Conclusion : lorsque une source de champ est invariante par rotation autour d'un axe fixe (Oz), les caractéristiques de ce champ ne peuvent dépendre que des variables de position r et z.

VII.3. Influence de l'invariance de la source par translation suivant un axe fixe (Oz).

Cette situation concerne des tiges, des tubes, des cylindres, des bobines dont les longueurs sont considérées dans les calculs comme infinies. Il s'agit bien sûr d'un modèle qui simplifie la réalité mais constitue une bonne approximation si le point M où on étudie le champ est situé à une distance de la source petite devant sa longueur, sans être près d'une extrémité. Dans de nombreux cas, ces sources sont également invariantes par rotation autour de l'axe (Oz). Je ne refais pas de figure : il suffit de considérer la précédente en imaginant le cylindre infiniment long. Un raisonnement analogue aux précédents montre que les caractéristiques du champ en M sont indépendantes de la variable z.

Conclusion : lorsque une source de champ est invariante par translation suivant un axe fixe (Oz), les caractéristiques de ce champ ne peuvent dépendre que des variables de position r et ϑ.

Remarque : bien sûr, ces influences peuvent se cumuler. Si, par exemple, la source est un cylindre d'axe de symétrie (Oz) dont la longueur peut être considérée comme infinie, les caractéristiques du champ ne peuvent dépendre que de la variable de position r.

retour à la page principale